Contrôle continu
Séries de Fourier, intégrales impropres, théorèmes de Fubini
Durée : 1h

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi)$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. À l'aide du théorème de Dirichlet appliqué en $x = \pi/2$, montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Réponse :

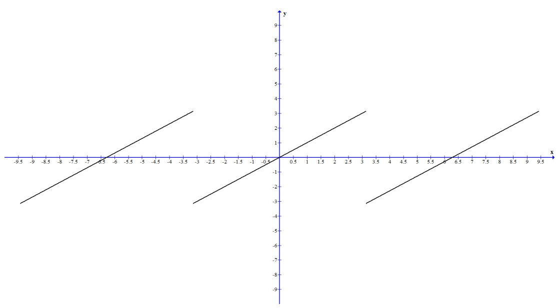

Figure 1 – Exercise 1.1

2. Comme la fonction est impaire, $c = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ (on peut aussi faire le calcul direct comme ci-dessous). Pour les coefficients b_n, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin\left(\frac{2\pi n}{2\pi} x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \mathrm{d} \cos(nx) \\
&= -\frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n\pi} (\pi \cos(n\pi) - (-\pi) \cos(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} [\frac{1}{n} \sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n\pi} (\pi \cos(n\pi) - (-\pi) \cos(-n\pi)) \\
&= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) \\
&= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de f est $S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$.

3. Comme f est continue par morceaux, le théorème de Dirichlet nous dit que $f(x) = S_f(x)$

dans les points x où f est continue. Comme f est continue dans $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= f(\frac{\pi}{2}) \\ &= S_f(\frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Comme $\sin(m\pi) = 0$ pour m entier, il faut seulement prendre la somme sur les n de la forme $n = 2k + 1$ avec k entier positif. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2k+2}}{2k+1} \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(-1)^k \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \end{aligned}$$

d'où on trouve $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 2

1. Étudier la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \mathrm{d}x$ (par une analyse asymptotique).
2. Calculer l'intégrale ci-dessus.

Réponse

1. La fonction est continue sur l'intervalle ouvert $(0, +\infty)$, il faut donc seulement étudier le comportement en 0 et à l'infini.
   En 0, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} &\underset{y=x^2}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \\ &\underset{(H)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y}}{1} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

   La fonction est donc continue en zéro, et en particulier intégrable autour de 0.
   À l'infini, on peut majorer avec la fonction $x \mapsto x^{-3/2}$, donc $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = O_{x\to+\infty}(x^{-3/2})$. En

effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x^{-3/2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{1/2}}\\
&\underset{(H)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}2x}{\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^{3/2}}{1+x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^{3/2}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty} 4x^{-1/2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc comme $x \mapsto x^{-3/2}$ est intégrable à l'infini, on conclut par le critère de comparaison qu'aussi $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ est intégrable à l'infini.

On a donc démontré que $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$ est intégrable.

2. On va calculer $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int_0^\infty \ln(1+x^2)\mathrm{d}x^{-1}\\
&= -[\frac{\ln(1+x^2)}{x}]_0^\infty + \int_0^\infty x^{-1}\mathrm{d}\ln(1+x^2)\\
&= -\lim_{M\to\infty}\frac{\ln(1+M^2)}{M} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} + \int_0^\infty x^{-1}\frac{1}{1+x^2}2x\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Avec la règle de l'Hôpital comme ci-dessus, on démontre que $\lim_{M\to\infty}\frac{\ln(1+M^2)}{M} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\mathrm{d}x &= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= 2[\arctan(x)]_0^\infty\\
&= 2(\frac{\pi}{2}-0)\\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Réponse : La fonction $(x,y)\mapsto \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}$ n'a pas de singularités, donc l'intégrale est bien définie sur $[0,1]\times[0,1]$. On peut écrire

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^1\int_0^1 \frac{y^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Mais en changeant la notation (comme on fait l'intégration sur x et y, ces symboles peuvent être remplacés par n'importe quelle autre symbole !), on obtient que

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Par Fubini, on a que $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Donc à la fin,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 0.\end{aligned}$$

Remarque : On pouvait aussi y arriver en faisant le calcul direct, mais c'était plus dur.

Rappel : Soit f une fonction T-périodique. Les coefficients de Fourier de f par rapport à T sont

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x,\\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 1,\\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 1.\end{aligned}$$