

Mathématiques pour les sciences

Instructeur :
K. De Commer

Licence S3 PC-C-STE
2013–2014

En guise d'introduction...

Le but de ce cours est de vous apprendre comment additionner. Bien sûr, on ne s'occupera pas des $1+1$ où des $5-2$: on va étudier *les sommes infinies* (séries) et *les sommes continues* (intégrales). Ne vous méfiez pas : une fois on met l'infini dans le jeu, le sol sous les pieds n'est plus si fiable : quantités qui ne sont plus bien définies, opérations innocentes qu'on ne peut plus utiliser, ... En même temps, l'infini nous surprend d'une manière agréable, en nous offrant des belles identités comme celle-ci de Leonhard Euler, datant de 1736 :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans le cours, on se concentrera surtout sur les méthodes de *calcul* : évaluation d'une série ou intégrale concrète, analyse du comportement asymptotique d'une expression, ... Néanmoins, une base théorique ainsi qu'intuitive est indispensable pour donner un *sens* à ces calculs. Elle aide aussi à éviter des erreurs de calcul, en se rendant compte par exemple qu'une solution obtenue est absurde. Pour assimiler ces techniques et intuitions, il est impératif de travailler vous-mêmes, en faisant les exercices qui vous seront offerts. Il va sans dire alors que les séances de TD font une partie intégrale de ce cours.

Les séries et les intégrales sont des outils de base qui apparaissent partout dans les sciences, non seulement dans les mathématiques pures ou la physique. J'espère donc que ce cours vous aidera à les manipuler avec plus de confiance.

Kenny De Commer
Cergy-Pontoise, 2013

Première partie

Séries

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Suites numériques

1.1.1 Définition

On joue un jeu : chaque personne crie un nombre, au hasard. On demande à quelqu'un de noter les nombres obtenus. Par exemple, on obtient la liste

2, 6, 396, 0.99, −666, π , 2, ...

Si on continuerait ce jeu indéfiniment, cette liste continuerait infiniment vers la droite. Notons que cette liste est ordonnée : si je demande ‘quel est le nombre que la troisième personne a crié’, vous répondrez ‘396’. On dira que c’est le nombre à l’*indice* 3.

2, 6, 396, 0.99, −666, π , 2, ...
 $\uparrow$
 3

On appellera une telle liste ordonnée de nombres comme ci-dessus *une suite*.

Définition 1.1.1. *Une suite est une collection de nombres, indexée par les entiers naturels.*

Exercices :

1. Vrai ou faux : le même nombre peut figurer plusieurs fois dans une suite.
2. Vrai ou faux : il suffit de connaître le début d'une suite pour connaître toute la suite (comme supposé dans les tests de QI).
3. Combien de suites est-ce qu'on peut former qui ne contiennent que des nombres entiers positifs, et telles que le nombre à l'indice n est inférieur ou égal à $\frac{n+13}{n^2+1}$? (Suggestion : Si pour n un indice donné on a $\frac{n+13}{n^2+1} < 1$, on sait que le nombre à cet indice est égal à 0.)

En général, c'est trop fatigant de donner toute cette liste de nombres chaque fois qu'on veut en parler. On donnera donc un nom à cette liste. En général, ce nom consistera d'un couple de parenthèses avec dedans une seule lettre munie d'un indice abstrait, comme (a_n) , (b_n) , (u_k) , (v_p) , ... Par exemple, on pourrait appeler notre suite ci-dessus la suite (u_n) , et on notera

$$(u_n) = (2, 6, 396, 0.99, -666, \pi, 2, \dots).$$

Dans l'expression (u_n) , le n n'est qu'un symbole abstrait. Si par contre on a choisi un nombre naturel concret n , le symbole u_n (sans parenthèses !) désigne alors le nombre à l'indice n . Par exemple pour la même suite (u_n) , on a $u_1 = 2, u_3 = 396, u_4 = 0.99$.

Attention ! Parfois, c'est utile de commencer une suite à un indice différent de 1, ou de prendre tous les nombres entiers (positifs ainsi que négatifs) comme des indices (dans ce cas, on obtient des suites qui continuent infiniment vers la droite *et* vers la gauche). On indiquera cela avec un petit symbole en bas de la notation. Par exemple, si on écrit $(u_n)_{n \geq 2}$, on veut dire que la suite commence à l'indice 2. Une fois qu'on y est habitué, on néglige parfois d'ajouter cette notation en plus, et on suppose que le choix du premier indice est clair du context.

La suite ci-dessus était aléatoire, mais dans beaucoup de cas une suite a une sorte de 'logique interne' : on peut déterminer le nombre qui apparaît à l'indice n par une formule où on règle de calcul.

Par exemple, définissons une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ par la formule suivante :

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Donc, la valeur de cette suite à l'indice n est précisément la réciproque de ce nombre, c'est-à-dire $1/n$. Si on écrirait cette suite comme une liste de nombres, on obtiendrait

$$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots).$$

Si on a exprimé la valeur a_n d'une suite (a_n) directement en terme de l'indice n , on dira qu'on a trouvé *une formule de forme fermée* pour la suite.

Une autre façon de définir une suite est *par recursion* : on donne le terme initial ainsi que la règle d'obtenir le terme suivant du terme (ou des termes) précédent(s).

Exemple 1.1.2. Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par la règle suivante : on met $F_0 = F_1 = 1$, et si $n \geq 2$, on met $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Les premiers termes de cette suite sont

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

Cette suite est connue comme *la suite de Fibonacci*, comme elle apparaît dans le livre 'liber abaci' ('livre de calcul') de Leonardo Pisano ('Léonard de Pise'), surnommé après sa mort *Fibonacci* ('fils de Bonacci').¹

C'est possible de donner une formule de forme fermée pour cette suite, comme on verra dans la section 2.3.

1. Liber Abaci, Chapitre 12 : 'Quot paria coniculatorum in uno anno ex uno pario germinantur. Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno : cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.' Traduction : 'Combien de lapins descendent en une année d'une pair de lapins? Quelqu'un met une pair de lapins dans un endroit complètement entouré par un mur, pour découvrir combien de lapins en descendraient dans une année : par leur nature une pair prend un mois pour générer une autre pair; et dans leur deuxième mois après leur naissance ils commencent à reproduire.' On peut voir une copie de la page originale sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Liber_abaci.

Attention! Une même suite peut être définie de plusieurs façons. Par exemple, la suite avec terme général $u_n = \frac{1}{n}$ ci-dessus peut aussi être définie par une formule de recursion, en mettant

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1}. \end{aligned}$$

Comment est-ce qu'on peut vérifier c'est bien la même suite ? D'abord, c'est toujours utile de calculer les premiers termes pour voir si les suites *pourraient* être égales. Pour montrer qu'en fait *tous* les termes sont égaux, on pourrait ici utiliser *un raisonnement par récurrence*. Rappelons-nous la structure d'une telle démonstration.

- D'abord, on montre que l'égalité vaut pour le premier terme. En effet, $u_1 = 1$ dans les deux définitions.
- Maintenant, on suppose que pour un $n \geq 1$ donné, on sait déjà que u_n , donné avec la formule de récurrence, est égal à $\frac{1}{n}$. Le but est alors de montrer qu'aussi $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Mais par la formule de récurrence, on a bien que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} \quad (\text{hérédité}) \\ &= \frac{1}{n+1} \quad (\text{multiplication avec } n \text{ de numérateur et dénominateur}). \end{aligned}$$

Exercices :

1. Écrire les premiers six termes des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ suivantes.
 - $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$,
 - $u_n = u_{n-1} + 1$ où $u_0 = 0$,
 - $u_n = u_{n-1}^2 + 1$ où $u_0 = 0$,
 - $u_n = 1 - \frac{1}{u_{n-1}}$ où $u_0 = 1/2$.
2. Déterminer F_{13} dans la suite de Fibonacci. (Réponse : 377)
3. Montrer que les deux suites suivantes, $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$, sont égales :

- $u_n = (n + 1)^2$,
- $v_0 = 1, v_n = v_{n-1} + 2n + 1$.

Remarque 1.1.3. Si jamais vous rencontrez une suite de nombres entiers qui vous semble curieux, vous pouvez consultez le site web <http://oeis.org/> pour voir si c'est en fait une suite bien connue ou pas.

1.1.2 Convergence

Définition 1.1.4. On dit qu'une suite (u_n) est convergente s'il existe un nombre u tel que u_n se rapproche de u quand n devient très large (on dit aussi : quand n tend vers l'infini). On dit alors que (u_n) converge (ou tend) vers u , et que u est la limite de la suite (u_n) . On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

Exemples 1.1.5. • La suite (u_n) avec $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers zéro, comme $\frac{1}{n}$ devient très petit (proche de zéro) quand n devient très large, visualisez $u_{100} = 0,01$, $u_{10000} = 0,0001$, On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

- La suite v_n avec $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ a la limite 1, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1.$$

La définition ci-dessus n'est pas trop rigoureuse : une définition plus au goût d'un mathématicien est la suivante. On dit qu'une suite (u_n) est *convergente* s'il existe un nombre $u \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec la propriété que si $n \geq N$, alors $|u_n - u| < \varepsilon$. On peut facilement interpréter cette définition au moyen d'un dessin : la suite (u_n) converge vers u si *pour tout* petit intervalle autour de u , les valeurs u_n se trouvent dans cet intervalle dès que l'indice n a passé un indice 'seuil' N .

Définition 1.1.6. Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. Un cas particulier est la divergence vers l'infini : on dit que la suite (u_n) diverge vers plus infini si pour tout nombre donné M , on a $u_n \geq M$ pour tout n suffisamment grand. Notation :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty.$$

De même, on dit que la suite (u_n) diverge vers moins infini si pour tout nombre donné M , on a que $u_n \leq M$ pour tout n suffisamment grand. Notation :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty.$$

Remarque 1.1.7. Une suite (u_n) est dite *croissante* si pour tout n , on a $u_n \leq u_{n+1}$. Si une suite est croissante, soit elle est convergente, soit elle diverge vers plus infini. De même, on dit qu'une suite (u_n) est *décroissante* si pour tout n , on a $u_n \geq u_{n+1}$. Si une suite est décroissante, soit elle est convergente, soit elle diverge vers moins infini.

Exemples 1.1.8. • La suite décroissante $(\frac{1}{n})$ tend vers 0, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

- La suite croissante (n) tend vers $+\infty$.
- La suite $(1, 0, 1, 0, \dots)$ est divergente, mais ne diverge pas vers l'infini.

En général, ce qui est le plus important, c'est de connaître les règles pour traiter les limites en terme de certaines limites connues. Quelques limites fondamentales sont les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Plus généralement, si $P(n)$ et $Q(n)$ sont des polynômes en n , on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0 \quad \text{si degré } P < \text{degré } Q.$$

Par contre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty \quad \text{si degré } P > \text{degré } Q,$$

ou le signe dépend des coefficient dominants. Finalement, si les degrés de P et Q sont égaux, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ est le quotient des coefficients dominants. Par exemple,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n+2} = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2.$$

- Si $a > 1$ on a ²

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} = 0.$$

2. On se rappelle que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Par contre, si $0 < a < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} = +\infty.$$

- Pour tout polynôme $P(n)$ en n , et tout $a > 1$, on a que $P(n)a^{-n} = 0$. Par exemple,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n - 1)2^{-n} = 0.$$

On a aussi des règles simples, comme

- la limite d'une somme est la somme des limites, par exemple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{n+1}{n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} = 1 + 1 = 2.$$

- la limite d'un produit est le produit des limites, par exemple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} 2^{-n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

- la limite d'une fonction continue f appliquée à une expression contenant n est la fonction continue appliquée à la limite, par exemple avec f la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Ici, il faut seulement faire attention que l'expression obtenue n'est pas une *forme indéterminée*.

$$\boxed{\text{Formes indéterminées}} : \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad 0 \cdot \infty.$$

Dans ce cas, c'est souvent utile de réduire l'expression à une expression de la forme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$, et d'appliquer la règle suivante, connue comme *règle de l'Hôpital*.

Lemma 1.1.9 (Règle de l'Hôpital). *Si f et g sont deux fonctions différentiables et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \pm\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0$, alors³*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)},$$

si l'expression à droite est bien définie.

3. On suppose aussi que $g(x) \neq 0$ pour tout x suffisamment grand.

Exemple 1.1.10. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n} = 0$, à l'aide de la règle de l'Hôpital. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Ici, on observe que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.11. Comme on aurait pu observer ci-dessus, si on applique la règle de l'Hôpital dans une computation, on met le symbole (H) sous le signe d'égalité dans l'étape où on applique la règle.

Exercices :

1. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$\left(\frac{n^2 + 2}{n + 1}\right)_{n \geq 0}, \quad \left(3^{\frac{1}{n^2}}\right)_{n \geq 1}, \quad \left(\frac{2 - n - n^2}{2n^2 + 6}\right)_{n \geq 0}, \quad ((n^6 + n^3 + 1)5^{-n})_{n \geq 0}.$$

2. Montrer que la limite de $(\sqrt[n]{n})_{n > 0}$ vaut 1. (Suggestion : prendre le logarithme, en se rappelant que $\ln(a^b) = b \ln(a)$ et que $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$.)

1.2 Séries numériques

À partir d'une suite donnée, on peut construire des autres suites.

Exemple 1.2.1. Chaque jour, quelqu'un joue un jeu d'hasard où il gagne ou perd de l'argent. Voici les montants qu'il a gagné ou perdu chaque jour (à partir d'un certain jour).

$$(u_n) = (20, 30, -10, -50, -50, 100, \dots).$$

On se demande : le troisième jour, combien a-t-il gagné ou perdu *en total* ? Évidemment, on prend la somme $20 + 30 - 10 = 40$. Et le huitième jour ? Et

le n -ième jour? On peut donc mettre tous ces montants ensemble dans une nouvelle suite :

$$(S_n) = (20, 50, 40, -10, -60, 40, \dots).$$

En formule, on a que

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Définition 1.2.2. Soit (u_n) une suite de nombres. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) où

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

On appelle S_n la n^e somme partielle de la série.

Exemples 1.2.3. • Si

$$(u_n) = (1, 1, 1, \dots),$$

une suite constante, alors

$$(S_n) = (1, 2, 3, 4, \dots).$$

• On se souvient de la formule

$$1 - q^{n+1} = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n).$$

Donc si $q \neq 1$ est un nombre, et (u_n) est la suite géométrique à raison q et terme initial 1,

$$(u_n)_{n \geq 0} = (1, \underset{q^0}{\underset{\parallel}{q}}, \underset{q^1}{\underset{\parallel}{q^2}}, q^3, q^4, \dots),$$

on a que la suite des sommes partielles associée est

$$\begin{aligned} (S_n)_{n \geq 0} &= (1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \dots) \\ &= \left(\frac{1 - q}{1 - q}, \frac{1 - q^2}{1 - q}, \frac{1 - q^3}{1 - q}, \dots \right). \end{aligned}$$

On a la forme fermée $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercices :

1. Déterminer la suite des sommes partielles de la suite

$$(u_n) = (1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots).$$

2. Déterminer la suite des sommes partielles pour la suite

$$(v_n) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots).$$

Définition 1.2.4. Soit (u_n) une suite. On dit que la série avec terme général u_n converge si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge. On appelle alors la limite de la suite des sommes partielles la somme de la série. On la note comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que la série diverge.

Attention! On utilise parfois le symbole abstrait $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ pour parler facilement de la suite des sommes partielles associées, même si la série ne converge pas! Dans ce cas, on dit plutôt que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ est une *série formelle*. Par exemple, on peut dire alors des choses comme ‘la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge’.

Exemples 1.2.5. • Pour la suite constante $(u_n) = (1, 1, 1, \dots)$, la n^{e} somme partielle est égale à $S_n = n$, ce qui tend vers l’infini. La série $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ est donc divergente.

- Plus généralement, soit $q \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque, et considérons de nouveau la suite $(v_n) = q^n$. On peut alors écrire, si $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Le cas $q = 1$ est la suite constante de l'exemple précédent. Pour $q \neq 1$, on a trois cas à considérer.

- Si $|q| > 1$, on voit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ est divergente, comme q^{n+1} tend vers l’infini.
- Si $|q| < 1$, on a que la série converge, et la somme de la série est égale à

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Si $q = -1$, la suite (v_n) est $(1, -1, 1, -1, \dots)$, et la suite des sommes partielles est alors $(1, 0, 1, 0, \dots)$. On voit que la suite $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$, appelée aussi *série de Grandi*, est divergente.
- Considérons la suite $(w_n)_{n \geq 1} = \frac{1}{n}$. La série associée, appelée *série harmonique*, a comme n^{e} somme partielle

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Montrons que cette série est divergente.

Supposons que nous sommes arrivés dans la suite à une valeur n avec $n \geq 2^{k+1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors S_n contient en particulier la somme

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k - 1} + \frac{1}{2^k + 2^k}.$$

Comme on a $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, qu'on peut réécrire cette expression comme

$$\underbrace{\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k} \geq 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

On voit qu'alors

$$\begin{aligned} S_n &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k+1} \\ &= 1 + \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

On peut faire cette dernière valeur aussi large qu'on veut en prenant n suffisamment grand. Il en découle que (S_n) est divergente.

Exercices :

1. Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite quelconque, on peut former une nouvelle suite $(v_n)_{n \geq 1}$ avec

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

La série avec terme général v_n est appelée une *série télescopique*.

- Vérifier que la n^{e} somme partielle de la suite (v_n) est égale à $u_{n+1} - u_1$.
- Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente si et seulement si (u_n) est convergente, et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) - u_1.$$

2. Déterminer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (Suggestion : écrire $\frac{1}{n(n+1)}$ comme $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ pour des constantes A et B .)

Pour finir cette section, introduisons la définition suivante.

Définition 1.2.6. On dit que la série de terme générale u_n est absolument convergente si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ converge.⁴

Remarque 1.2.7. Comme $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ a pour terme général un nombre positif, on a que $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ est une suite croissante. On a donc que soit cette série converge, soit elle diverge vers l'infini.

Exemple 1.2.8. La suite $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ n'est pas absolument convergente, comme $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, dont on sait qu'elle n'est pas convergente. Par contre, on verra plus tard que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ est bien convergente.

1.3 Critères de convergence

Il existe des critères divers, pas toujours concluants, pour vérifier si une série converge ou diverge.

4. On se rappelle que $|a|$ est la valeur absolue d'un nombre, donc $|a| = a$ si a est positif, et $|a| = -a$ est négatif. Par exemple, $|2| = 2$ et $|-4| = 4$.

Le premier critère est très simple.

Critère 1. Pour qu'une série converge, il est *nécessaire* (mais *pas suffisant*!) que la suite (u_n) de ses termes généraux converge vers zéro :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Exemples 1.3.1.

- Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n})$. Comme $\cos(\frac{1}{n})$ converge vers $\cos(0) = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n})$ est divergente.
- Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$. Comme la suite $(\sin(n))$ n'est pas convergente (et en particulier ne converge pas vers zéro), la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$ est divergente.⁵
- La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a pour terme général $\frac{1}{n}$, ce qui converge vers zéro. Alors, à partir du critère ci-dessus *on ne peut pas décider* si la série est divergente ou convergente. Mais on a déjà déterminé, à partir d'une *autre* méthode, que la série est divergente.

Un autre critère qui est assez facile à vérifier, mais néanmoins très utile, est celui de la comparaison avec une autre série.

Critère 2 (Critère de comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $v_n \geq 0$ pour tout n .

- Si $|u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente, on a qu'aussi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- Si $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est divergente, on a qu'aussi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente.

Exemple 1.3.2. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ avec $u_n = \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$. On a que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} &\geq \frac{2}{2\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

5. Ce n'est pas si direct pour montrer que $(\sin(n))$ est divergente, on utilise en fait que π est un nombre irrationnel. On admet donc ici plutôt la divergence de $(\sin(n))$.

Comme $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même pour $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$.

On peut aussi formuler le critère d'une manière plus quantitative.

Critère 2' (Critère de comparaison, version quantitative). Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $v_n > 0$ pour tout n .

- Si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est convergente (donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$) et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente.
- Si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a$ avec $a \neq 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente.

Exemple 1.3.3. Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$. Notons $u_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}$, et notons $v_n = \frac{1}{n}$. On voit que $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^3+n}{n^3+1}$, ce qui converge vers 1 quand n tend à l'infini. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente (c'est la série harmonique), aussi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ est divergente, par la deuxième partie de Critère 2'.⁶

Les deux critères suivants sont très utiles pour démontrer la convergence absolue d'une série. Essentiellement, ils sont des raffinements du critère 1, prenant en compte la *rapidité* de la convergence vers zéro de la suite.

Critère 3 (Critère de Cauchy). Soit (u_n) une suite. Si

$$\lim |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

on a que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument.⁷

Attention! Dans le cas où $\lim |u_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, le critère reste muet! Par contre, si $\lim |u_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, on peut aisément démontrer qu'en fait $\lim |u_n| = +\infty$, donc forcément $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Exemples 1.3.4. • Mettons $u_n = (-\frac{1}{2})^n$, une progression géométrique à raison $-\frac{1}{2}$. Le critère de Cauchy nous dit que la série associée est conver-

6. En fait, la conclusion qu'on peut faire à partir du critère est plutôt que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ n'est pas *absolument* convergente. Mais comme on voit directement que tous les termes sont positifs, convergence et convergence absolue ont le même sens pour cette série.

7. Ici, on remplace $\lim$ avec $\limsup$ si la limite n'existe pas.

gente, comme $\lim |u_n|^{1/n} = |(-\frac{1}{2})^n|^{1/n} = ((\frac{1}{2})^n)^{1/n} = \frac{1}{2}$, ce qui est *strictement* inférieur à 1. Évidemment, ici on sait même évaluer la série, comme on a que $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = 2/3$.

- Mettons $u_n = \frac{1}{2^n+3^n}$. Alors on a que⁸

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} &= \lim \left(\frac{1}{2^n+3^n} \right)^{1/n} \\ &\leq \lim \left(\frac{1}{2^n} \right)^{1/n} \\ &= 1/2 < 1, \end{aligned}$$

donc aussi la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$ est convergente, bien que ce soit maintenant pas du tout clair comment déterminer plus explicitement la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$.

- Mettons $u_n = \frac{1}{n}$. On a que $\lim |u_n|^{1/n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. Du critère de Cauchy on peut donc *rien* conclure sur la convergence de la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (bien qu'on sache déjà que cette série est divergente).

Critère 4 (Critère de d'Alembert). Soit (u_n) une suite. Si on peut trouver une constante $r < 1$ (indépendant de n) telle que

$$|u_{n+1}| \leq r |u_n|$$

pour tout n suffisamment grand, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente.

Nous insistons sur le fait que la borne r dans les énoncés est *uniforme* (donc indépendante de n). En effet, si on sait seulement que $|u_{n+1}| < |u_n|$ pour tous les n , on ne peut conclure ni convergence, ni divergence (même si la suite tend vers zéro).

8. Est-ce que vous pouvez démontrer que la limite dans la première ligne existe? Suggestion : prendre la logarithme et appliquer la règle de l'Hôpital en remplaçant n par $\ln(x)$, où on laisse alors x tendre vers l'infini. En tout cas, l'existence de la limite même n'est pas trop importante ici, à cause de l'estimation dans la deuxième ligne.

Mettons de nouveau ce critère dans une forme plus pratique.

Critère 4' (Critère d'Alembert, version limite). Soit (u_n) une suite.

Si $u_n \neq 0$ pour n grand, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente.

De nouveau, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, le critère reste muet. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente (comme la suite (u_n) ne peut pas converger vers zéro dans ce cas - exercice!).

Exemples 1.3.5. • Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (\frac{1}{n!})$.⁹ On voit alors que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2} u_n \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Le critère de d'Alembert nous dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est donc convergente.

- Pour un $k \in \mathbb{R}_0^+$ donné, considérons la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{n^k}\right).$$

La série associée est appelée une *série de Riemann* (ou *série hyperharmonique*). Le cas $k = 1$ se réduit à la série harmonique.

On a que la suite (u_n) est décroissante avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k = 1,$$

9. On se rappelle que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, donc par exemple $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

ainsi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k = 1.$$

On ne peut donc pas appliquer les critères de Cauchy ou de d'Alembert pour décider sur la convergence des séries.

Néanmoins, on peut se servir de la Proposition 4.3.1 et la divergence de la série harmonique pour démontrer que la série de Riemann est divergente si $k \leq 1$.

Par contre, quand on a que $k > 1$, la série est convergente : on a que, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^k} \leq \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right),$$

et la série télescopique des termes à droite est convergente.¹⁰

Exercice : Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente en utilisant une technique similaire à celle de la démonstration que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Finalement, nous considérons le *critère de Leibniz*, qui nous donne de l'information sur la convergence d'une série qui n'est pas forcément absolument convergente.

Critère 5 (Critère de Leibniz). Soit (u_n) une suite alternante (à la fois positive et négative), telle que la suite $|u_n|$ est décroissante avec limite 0. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

Exemple 1.3.6. : Soit $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, donc

$$(u_n) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots).$$

10. Pour démontrer l'inégalité ci-dessus, notons d'abord qu'elle est équivalente, en multipliant les deux côtés avec $(k-1)(n+1)^k$, à l'inégalité $k-1 \leq \frac{(n+1)^k}{n^{k-1}} - (n+1) = \frac{(n+1)^k - n^k - n^{k-1}}{n^{k-1}}$. Alors par le binôme de Newton, on a $(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \dots$. Donc $\frac{(n+1)^k - n^k - n^{k-1}}{n^{k-1}} = (k-1) + \binom{k}{2}\frac{1}{n} + \dots$, où tous les termes restants sont positifs.

On a que $|u_n| = \frac{1}{n}$, donc c'est bien une suite décroissante ($|u_{n+1}| \leq |u_n|$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$). En plus, on a que $\lim \frac{1}{n} = 0$. On peut donc appliquer le critère de Leibniz, qui nous dit que la série associée est convergente.¹¹ Par contre, comme la série harmonique n'est pas convergente, on voit que cette série n'est pas *absolument* convergente.

1.4 Une inégalité importante

Si (u_n) est une suite, quelle est 'son ampleur'? Quand est-ce qu'on peut dire d'une suite qu'elle est grande, ou petite? Cette question n'admet pas de réponse unique, et on pourrait fabriquer des millions de notions d'ampleur pour les suites si on voudrait. Néanmoins, il y a certaines notions d'ampleur qui s'avèrent très utiles, appelées des *normes*. Ici, on ne mentionne que les trois normes suivantes.

- La *norme uniforme* : Si (u_n) est une suite, on dénote

$$\|(u_n)\|_\infty = \sup_n |u_n|,$$

et on l'appelle la norme uniforme de la suite.¹² Par exemple, si $(u_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, on a que la valeur maximale dans cette suite est 1, donc $\|(u_n)\|_\infty = 1$. Si $(v_n) = (1 - \frac{1}{n}) = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$, on voit que la valeur maximale sera 'finalement' 1, donc aussi $\|(v_n)\| = 1$.

- La *norme l^1* (norme 'ell 1') : Si (u_n) est une suite, on dénote

$$\|(u_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|,$$

et on dit que c'est la norme de la suite en l^1 . Par exemple, la norme en l^1 de la suite géométrique $(u_n) = (\frac{1}{2^n})$ est $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

11. On peut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln(2)$, où $\ln$ est le logarithme naturel.

12. Rappel : $\sup$ veut dire 'borne supérieure' d'un ensemble de nombres : c'est le nombre le plus petit qu'on peut trouver qui est néanmoins plus grand que tous les nombres dans l'ensemble.

- La *norme* l^2 (norme ‘ell 2’) : Si (u_n) est une suite, on dénote

$$\|(u_n)\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)},$$

et on l’appelle la norme l^2 de (u_n) . Par exemple, si on prend de nouveau la suite géométrique $(u_n) = (\frac{1}{2^n})$, la norme en l^2 est $\|(u_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice : Montrer que pour toute suite, on a $\|(u_n)\|_{\infty} \leq \|(u_n)\|_1$, et aussi $\|(u_n)\|_{\infty} \leq \|(u_n)\|_2$.

La forme de la norme l^2 pourrait vous paraître un peu bizarre. Eh bien, rien autre pouvait être plus naturel ! En effet, considérons l’espace $\mathbb{R}^3$ qui forme un modèle idéalisé pour l’espace qui nous enveloppe. Les points p dans $\mathbb{R}^3$ se décrivent à l’aide d’un triple de nombre réels, disons $p = (x, y, z)$. Supposons maintenant que $p = (x_1, y_1, z_1)$ et $q = (x_2, y_2, z_2)$ sont deux points dans $\mathbb{R}^3$. Quelle est la distance euclidienne $d(p, q)$ entre les deux ? On sait bien que

$$d(p, q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

On voit bien que c’est de la même forme que ci-dessus : une racine d’une somme de carrés ! La seule différence est que pour les suites, on a remplacé une somme avec trois termes (pour $\mathbb{R}^3$) par une série contenant un nombre infini de termes. On peut dire que l’espace des suites, avec la distance

$$d((u_n), (v_n)) = \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n - u_n|^2\right)},$$

est comme *un espace euclidien avec un nombre infini de dimensions*.¹³ On appelle un tel espace aussi un *espace de Hilbert*. Au lieu des axes principales déterminés par les vecteurs de direction principale $X = (1, 0, 0)$, $Y = (0, 1, 0)$ et $Z = (0, 0, 1)$, on a maintenant un nombre infini de directions principales,

13. En fait, on considère ici seulement les suites (u_n) avec $\|(u_n)\|_2 < \infty$

données par les vecteurs principales $X_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $X_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $X_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \dots$

Cette comparaison avec $\mathbb{R}^3$ nous mène directement à des autres idées : est-ce qu'on peut définir pour les suites des analogues du produit scalaire ? On se rappelle que dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire entre deux vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ est donné par¹⁴

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

On a alors que

$$\langle u, v \rangle = \|u\|_2 \|v\|_2 \cos(\theta),$$

où θ est l'angle formé entre u et v . En particulier, on a que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.

En effet, ces notions ont aussi un sens pour les suites : si (u_n) et (v_n) sont deux suites, on peut former leur *produit scalaire*

$$\langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n,$$

si l'expression à droite est bien définie. La proposition ci-dessous donne alors une généralisation de l'inégalité ci-dessus.

Proposition 1.4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovsky¹⁵). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Supposons que $\|(u_n)\|_2$ et $\|(v_n)\|_2$ sont bien définies (donc $< \infty$). Alors $\langle (u_n), (v_n) \rangle$ est bien défini, et on a pour la valeur absolue du produit scalaire que*

$$|\langle (u_n), (v_n) \rangle| \leq \|(u_n)\|_2 \|(v_n)\|_2.$$

Plus explicitement : si on a que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2$ convergent, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ converge, et nous avons l'inégalité

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2}.$$

14. On écrit parfois aussi $\langle v, w \rangle = v \cdot w$, en anglais le 'dot product'.

15. Pour les séries, cette inégalité doit être attribuée à Cauchy. Buniakovsky, un étudiant de Cauchy, a montré qu'une telle inégalité vaut aussi si on remplace suites par fonctions et séries par intégrales. Finalement, Schwarz a montré que l'inégalité vaut dans le contexte très général d'espaces linéaires avec produit scalaire.

Les espaces de Hilbert sont très importants pour les applications en physique et en chimie. En effet, un élément d'un espace de Hilbert¹⁶ peut être utilisé pour d'écrire l'état (pure) d'une particule élémentaire comme un électron. On peut 'visualiser' les directions principales comme les états dans laquelle une particule se trouve dans une régime d'énergie fixée. On fera encore une brève allusion aux espaces de Hilbert quand nous traiterons l'analyse de Fourier dans le chapitre 3.

1.5 Suites et séries doubles

Au lieu de considérer des suites indexées par les nombres naturels, on peut aussi considérer des suites indexées par... des couples de nombres naturels. On peut dénoter ces suites comme $(a_{mn})_{m,n \geq 0}$, et les représenter comme des *matrices* (rectangles de nombres).

Exemple 1.5.1. Soit $a_{mn} = m + 2n$. On obtient la suite double

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

De même, on peut évidemment prendre les séries doubles associées... Évidemment ? Pas complètement : dans quel ordre est-ce qu'on prendra la somme ? Est-ce qu'on somme d'abord verticalement, et alors horizontalement, donc quelque chose comme $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$?¹⁷ Où est-ce qu'on somme d'abord horizontalement et *après* verticalement, comme dans $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$? Où est-ce qu'on prend toute une autre manière d'additionner la série double, par exemple en prenant la limite de $\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{mn}$ en laissant N tendre vers l'infini ? Les réponses qu'on obtient ne sont pas toujours les mêmes, comme illustré par l'exemple suivant.

16. Plutôt, on utilise les espaces de Hilbert *complexes*, c'est-à-dire on admet que les valeurs u_n des suites sont des nombres complexes.

17. Dans cette notation, on *commence* avec la sommation $\sum$ qui est la plus à droite.

Exemple 1.5.2. Considérons la suite double

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si on somme d'abord les lignes, on obtient la suite constante $(0, 0, 0, 0, \dots)$, et donc $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 0$. Par contre, si on somme d'abord les colonnes, on obtient la suite $(1, 0, 0, 0, \dots)$, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} = 1$.

Néanmoins, il y a une situation assez importante où l'ordre de sommation n'a aucune importance.

Théorème 1.5.3 (Théorème de Fubini pour les séries doubles). *Soit $(a_{mn})_{m,n}$ une suite double, et supposons qu'une des deux séries doubles $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}|$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}|$ converge. Alors $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$ convergent, et*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

En fait, on peut prendre ici la sommation des valeurs dans n'importe quel ordre, et on arrivera toujours à la même réponse.

En particulier, ce théorème s'applique quand tous les a_{mn} sont positives, et dans ce cas on peut aussi conclure que $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ diverge si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$ diverge. On met cette observation dans la forme d'un slogan.

SI ON EST POSITIF, TOUT VA BIEN!

Chapitre 2

Séries entières

Dans le premier chapitre, nous avons étudié des séries numériques, c'est-à-dire des séries où les termes étaient des nombres. Mais on peut aussi former des séries avec des fonctions comme termes. Dans les deux chapitres suivants, nous allons étudier deux types de séries où le terme général est une fonction d'un type très particulier. Dans le chapitre présent, nous étudions les séries de fonctions où le n^{e} terme dépend seulement de la n^{e} puissance de la variable. Dans le troisième chapitre, nous étudions une autre classe de fonctions où les termes sont construits de fonctions trigonométriques.

2.1 Suites de fonctions

On a vu dans le premier chapitre la notion de *suite de nombres*. On peut également définir des suites d'autres objets, comme des *fonctions*¹ : disons

$$(f_n) = (f_1, f_2, f_3, f_4, \dots)$$

ou par exemple $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = e^x$,

Dans ce contexte plus élaboré, ce n'est par contre plus suffisant d'avoir une seule notion de convergence. En effet, pour les applications on a besoin de tout

1. On suppose pour une suite de fonctions qu'elles ont tous le même domaine de définition.

un zoo de notions d'approximation pour les fonctions. Énonçons-en quelques-unes.

- *Convergence simple* : Pour tout x , on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, ou, écrit d'une autre façon, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ pour tout x .
- *Convergence uniforme* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f(x) - f_n(x)| = 0$.²
- *Convergence en L^1* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x) - f_n(x)| dx = 0$.
- *Convergence en L^2* : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0$.

Dans ces notes, on travaillera surtout avec la convergence simple. La convergence uniforme et la convergence en L^2 feront des 'cameos', mais on ne les traitera pas en détail. Pourtant, ils sont très importantes. La convergence en L^2 par exemple mène (de nouveau, voir Section 1.4) à la notion de 'espace de Hilbert', notion fondamentale dans la mécanique quantique. On en dira un petit peu plus dans le chapitre sur les séries de Fourier.

Remarque 2.1.1. La convergence uniforme est (beaucoup) *plus forte* que la convergence simple : si $f_n \rightarrow f$ uniformément, on a *forcément* que $f_n \rightarrow f$ simplement. Par contre, si $f_n \rightarrow f$ simplement, on n'a pas forcément que $f_n \rightarrow f$ uniformément, mais dans ce cas il n'y a que deux possibilités : ou bien $f_n \rightarrow f$ uniformément, ou bien f_n ne converge pas du tout uniformément.

Exemples 2.1.2. 1. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. On a que f_n converge uniformément vers la fonction constante $f(x) = 0$. En effet, on a que $\sup_x |f_n(x) - f(x)| = \sup_x |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$, ce qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Automatiquement, on a donc que f_n tend vers f simplement.

2. Considérons la suite de fonctions g_n où $g_n(x) = e^{-(x-n)^2}$. Si on met de nouveau $g(x) = 0$, on a que $g_n \rightarrow g(x)$ simplement. En effet, pour tout

2. Rappel : $\sup$ veut dire 'borne supérieure' d'un ensemble de nombres : c'est le nombre le plus petit qu'on peut trouver qui est néanmoins plus grand que tous les nombres dans l'ensemble. $\sup_x$ veut dire qu'on considère la borne supérieure par rapport à la variable x , en laissant tous les autres variables (comme par exemple n) constantes.

x , on a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} &= e^{-(x-\lim_{n \rightarrow \infty} n)^2} = e^{-(x-\infty)^2} \\ &= e^{-\infty} = 0.\end{aligned}$$

Par contre, g_n ne converge pas uniformément à g , comme

$$\sup_x |g_n(x) - g(x)| = \sup_x |g_n(x)| \geq |g_n(n)| = 1.$$

2.2 Séries de fonctions

Une fois qu'on a la notion de suite de fonctions à notre disposition, il n'y a aucune difficulté à définir la notion de *série* de fonctions. Comme pour les séries numériques, on fera une distinction entre les *séries formelles* (associées à une suite de fonctions) et les séries proprement dites. Comme pour les suites, on doit aussi spécifier le type de convergence qu'on utilise. Pour la convergence simple, la notion suivante est utile.

Définition 2.2.1. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions, et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la série formelle associée. On appellera domaine de définition de la série formelle l'ensemble des x telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Sur le domaine de définition, on peut donc définir la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Exemple 2.2.2. Soit X^n la fonction telle que $X^n(x) = x^n$, et considérons la série formelle associée $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$. Par Exercice 1.2.5, on sait que pour X remplacé par un réel x choisi, cette série convergera si et seulement si $-1 < x < 1$, et alors on obtient la fonction associée

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Dans la suite, on rencontrera deux types de séries de fonctions spéciales : les *séries entières* et les *séries de Fourier*. Ce qui leur rend distincts est que chaque fonction f_n est d'un type très particulier : un multiple de la fonction $x \mapsto x^n$ pour les séries entières, et un multiple d'une fonction $x \mapsto \sin(nx)$ ou $x \mapsto \cos(nx)$ pour les séries de Fourier. À cause de leur forme très particulière, on peut dire beaucoup plus sur les propriétés de ces fonctions (notamment

par rapport à leur convergence par exemple), et on en dira quelque chose dans les sections à venir.

2.3 Séries entières formelles

Répetons que X^n dénote la fonction $x \mapsto x^n$.

Définition 2.3.1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite. On appelle série entière de terme général a_n la série formelle définie par

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

On appelle aussi f la série génératrice associée à la suite (a_n) .

Les séries formelles ne forment pas des objets isolés : on peut les faire inter-agir l'un avec l'autre. Par exemple, on peut prendre l'addition de deux séries formelles, ce qui correspond à prendre la somme de leurs suites correspondantes :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n.$$

On peut aussi prendre le produit de deux séries formelles :³

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.$$

Pour mieux comprendre la formule pour ce produit, considérons seulement

3. Si (a_n) et (b_n) sont deux suites, la suite des nombres $(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k})_{n \geq 0}$ est appelée leur *produit de Cauchy*.

les premiers termes et calculons le produit ‘évident’.

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) \\
 = & (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots) \\
 \stackrel{\text{distributivité}}{=} & a_0 b_0 + a_0 b_1 X + a_0 b_2 X^2 + \dots + a_1 X b_0 + a_1 X b_1 X \\
 & + a_1 X b_2 X^2 + \dots + a_2 X^2 b_0 + a_2 X^2 b_1 X + a_2 X^2 b_2 X^2 + \dots + \dots \\
 \stackrel{\text{regrouper}}{=} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + \dots \\
 = & \left(\sum_{k=0}^0 a_k b_k \right) + \left(\sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k} \right) X + \left(\sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k} \right) X^2 + \dots \\
 = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.
 \end{aligned}$$

Ces opérations satisfont alors les règles usuelles : commutativité et associativité, distributivité de la multiplication sur l’addition, ... On dit que les séries entières formelles forment un *anneau commutatif*.

Exemples 2.3.2. • On a déjà rencontré la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ dans la dernière section. Ici, on a $a_n = 1$ pour tout n .

- Les *polynômes* sont des séries entières formelles d’un type particulier : on a alors que $a_n = 0$ si $n \geq N$ pour un certain N donné. Par exemple, le polynôme $X^2 + 3X + 2$ est une série entière formelle avec $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ et $a_3 = a_4 = \dots = 0$.

Attention! Pour les polynômes, la croissance des monômes est d’habitude de droite à gauche, pendant que pour les séries, on a la convention de prendre la croissance des monômes de gauche à droite ! Donc le polynôme ci-dessus, écrit en forme de série ‘standard’, est plutôt $2 + 3X + X^2$.)

- En particulier, la série qui définit la fonction constante 1 (donc $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n > 0$) est une unité pour la multiplication : $1f = f = f1$.

Question : Quand est-ce qu’une série entière formelle f admet un inverse,

c'est-à-dire quand est-ce qu'il existe une série formelle g telle que $fg = 1$?

Réponse : Si et seulement si le terme constant a_0 de f n'est pas nul.

En effet, dans ce cas nous pouvons récursivement définir g . Si on met $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots$, on voit, en regardant la loi de multiplication pour les séries entières, qu'on veut

$$\begin{cases} 1 &= a_0b_0 & (0) \\ 0 &= a_0b_1 + a_1b_0 & (1) \\ 0 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 & (2) \\ \dots & & \end{cases}$$

Comme $a_0 \neq 0$, on voit que l'équation (0) admet une solution pour b_0 , notamment $b_0 = \frac{1}{a_0}$. En mettant cette valeur dans l'équation (1), on peut résoudre pour b_1 (de nouveau comme $a_0 \neq 0$!). En remplaçant le b_0 et b_1 par les valeurs obtenues dans (2) on peut résoudre pour b_2 , et ainsi de suite.

Exemple 2.3.3. Le polynôme $1 - X$ a le terme constant 1, donc il doit admettre une série entière formelle inverse. On prétend que c'est la série $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$. En effet,

$$\begin{aligned} & (1 - X) \sum_{n=0}^{\infty} X^n \\ &= (1 - X)(1 + X + X^2 + X^3 + \dots) \\ &= (1 - X) + (1 - X)X + (1 - X)X^2 + (1 - X)X^3 + \dots \\ \text{Distributivité} & \\ &= 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 + X^3 - X^4 + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercice :

Montrer que pour a, b avec $a, b \neq 0$, on a que l'inverse de $f = aX + b$ est donné par $g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)^{n+1}\right) X^n$. (Suggestion : essayez de réduire au cas précédent.)

Les séries formelles peuvent être des outils assez puissants en combinatoire. Plus précisément, si les a_n satisfont une relation de récurrence, on peut sou-

vent trouver une loi algébrique qui est satisfaite pour les séries génératrices associées. À partir de cette loi, on obtient plus d'informations sur les a_n , comme par exemple des formules fermées. Illustrons ce principe avec l'exemple de la suite de Fibonacci, voir Exercice 1.1.2.

Exemple 2.3.4. Prenons la suite de Fibonacci (F_n) . Soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n &= 1 + X + \sum_{n=2}^{\infty} F_n X^n \\
 &= 1 + X + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} X^{n+2} \\
 &= 1 + X + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+1} + F_n) X^{n+2} \\
 &= 1 + X + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} X^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^{n+2} \\
 &= 1 + \sum_{n=-1}^{\infty} F_{n+1} X^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^{n+2} \\
 &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^{n+2} \\
 &= 1 + X \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n + X^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n \\
 &= 1 + XF + X^2 F.
 \end{aligned}$$

On a donc obtenu que $F = 1 + XF + X^2 F$, ou bien

$$(1 - X - X^2)F = 1.$$

Donc F est l'inverse du polynôme $1 - X - X^2$ comme série formelle.

Mais on peut bien déterminer cette inverse aussi d'une autre manière. En effet, on se rappelle que si $aX^2 + bX + c$ est un polynôme (avec $a \neq 0$), il admet (en général) deux racines (complexes), les nombres $x_+ = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ et $x_- = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, où $D = b^2 - 4ac$. On peut alors décomposer $aX^2 + bX + c =$

$a(X - x_+)(X - x_-)$, et on vérifie que, si $x_+ \neq x_-$, on a

$$\frac{1}{aX^2 + bX + c} = \frac{1/(x_+ - x_-)}{a(X - x_+)} - \frac{1/(x_+ - x_-)}{a(X - x_-)} = \frac{1/\sqrt{D}}{(X - x_+)} - \frac{1/\sqrt{D}}{(X - x_-)}.$$

Dans le cas de notre polynôme, on a que le discriminant D de $1 - X - X^2 = -X^2 - X + 1$ est $D = 5$. Cela nous mène aux racines $x_+ = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_- = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On obtient donc que

$$\frac{1}{1 - X - X^2} = \frac{1/\sqrt{5}}{X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1/\sqrt{5}}{X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

En utilisant l'exercice précédent, on peut simplifier

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{1 - X - X^2} \\ &= \frac{1/\sqrt{5}}{X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1/\sqrt{5}}{X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} -\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} X^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} -\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1} X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right) X^n. \end{aligned}$$

En observant que

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

et de même $\frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on peut simplifier une dernière fois pour obtenir finalement que

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) X^n.$$

On obtient donc le résultat (surprenant ?) que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Exercice : Vérifier que la formule vaut pour les 4 premiers termes de la suite de Fibonacci.

2.4 Séries entières comme fonctions

Jusqu'ici, on a traité les séries entières formelles. Disons maintenant quelque chose sur leur domaine de définition : si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, pour quels nombres x est-ce que la série (numérique) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est bien définie, c'est-à-dire convergente ? Ce problème a une résolution assez concrète : on peut montrer que soit la série est convergente pour *tous* x , soit il existe un nombre $R > 0$, uniquement déterminé, tel que $f(x)$ converge si $|x| < R$ et diverge si $|x| > R$. Dans ce cas-là, on peut par contre rien dire (en général) sur le comportement des x avec $|x| = R$. La définition suivante baptisera le nombre R .

Définition 2.4.1. Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ une série entière formelle. Le rayon de convergence R de f , où $R \in [0, +\infty]$, est la seule valeur telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est convergente pour tout x avec $|x| < R$, et divergente pour tout x avec $|x| > R$.

Exemple 2.4.2. Regardons de nouveau la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$. On a déjà déterminé dans l'exemple 2.2.2 que cette série converge si on prend $X = x$ avec $|x| < 1$, et diverge pour $X = x$ avec $|x| > 1$. Le rayon de convergence dans ce cas est alors $R = 1$.

Dans beaucoup de cas, on peut directement déterminer R , en se basant sur les critères de convergence de Cauchy et de d'Alembert.

Proposition 2.4.3. Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ une série entière formelle.

Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, alors

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

De même, si $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe, alors

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Remarque 2.4.4. En fait, on peut donner une expression pour R qui est toujours vraie,

$$R = \frac{1}{\limsup \{ \sqrt[n]{|a_n|}, n \in \mathbb{N} \}}.$$

Exemple 2.4.5. Considérons la série entière

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, on a que $R = 1$. Donc $f(x)$ est convergente si $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$. Cependant, nous avons vu dans le chapitre précédent que $f(1)$ est divergente, pendant que $f(-1)$ est convergente (par le critère de Leibniz). Le domaine de convergence de notre série entière est donc l'intervalle semi-ouvert $[-1, 1)$.

Exercice : Quel est le rayon de convergence d'un polynôme (quelconque) ?

2.5 Dérivées de séries entières, série de Taylor

Les fonctions définies par les séries entières sont très régulières.

Proposition 2.5.1. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ une série entière avec rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $(-R, R)$ est dérivable, sa dérivée étant donnée par*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

En fait, rien nous empêche de définir l'opération 'prendre la dérivée' pour les séries entières *formelles*. Si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est une série entière formelle, on définit sa dérivée comme $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1}$. Convincez-vous que c'est une définition très raisonnable, en considérant la proposition ci-dessus !

On peut maintenant préciser un peu la proposition ci-dessus, qui nous garantit qu'il n'y a pas de conflit de notation.

Proposition 2.5.2. *Soit f une série entière avec rayon de convergence $R > 0$. Alors la série entière formelle f' a le même rayon de convergence, et $f'(x)$ coïncide avec la dérivée de la fonction f dans le point $x \in (-R, R)$.*

Exemples 2.5.3. • Considérons la série entière $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$. Alors $f' = \sum_{n=1}^{\infty} X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$. À l'aide de la forme d'Alembertienne pour R dans Proposition 2.4.3, on peut vérifier directement que le rayon de convergence de f est 1. Donc pour $-1 < x < 1$, on obtient que $f'(x) = \frac{1}{1-x}$. Cela implique que nécessairement $f(x) = -\ln(1-x)$ pour $-1 < x < 1$.

- Nous voulons déterminer la série entière formelle de $\frac{1}{(1-X)^2}$. On observe que $\frac{1}{(1-X)^2}$ est la dérivée de $\frac{1}{1-X}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X)^2} &= \left(\frac{1}{1-X} \right)' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n X^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X^n. \end{aligned}$$

Le raisonnement ci-dessus s'applique évidemment de nouveau à f' , et on obtient la *deuxième dérivée* f'' . Évidemment, on peut continuer ce processus, et la proposition suivante donne une version plus générale de la proposition 2.5.1.

Proposition 2.5.4. Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière avec rayon de convergence $R > 0$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $(-R, R)$. Alors f est dérivable à tous les ordres, avec la k^e dérivée donnée par⁴

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n. \end{aligned}$$

4. Faites attention au premier indice dans ces séries !

Remarque 2.5.5. On voit alors que les coefficients a_n d'une série entière s'expriment en fonction de ses dérivées (si le rayon de convergence est plus grand que 0) :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Supposons maintenant que f est une fonction arbitraire. On voudrait savoir si on peut décrire f à l'aide d'une série entière, disons localement autour de 0. Cela serait très utile de savoir, comme les séries entières se comportent très bien, étant des 'polynômes généralisés'. Au moins, il faudrait avoir alors que f est dérivable à tous les ordres en zéro, comme cela vaut pour les séries entières comme le dit la proposition 2.5.4. Dans ce cas-là, on peut certainement lier une série entière à f , même si le rapport entre la fonction et la série n'est pas encore clair à cet instant.

Définition 2.5.6. Soit f une fonction qui est dérivable à tout ordre en 0. La série de Taylor associée à f est la série $f_T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où a_n est défini par $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Pour comparer f avec sa série de Taylor associée, la formule suivante est indispensable.

Proposition 2.5.7. Soit f une fonction qui est dérivable à tout ordre sur un intervalle $(-R, R)$. Soit $f_{T,k}$ la k -ième somme partielle de sa série de Taylor associée, c'est-à-dire $f_{T,k}(X) = \sum_{n=0}^k a_n X^n$ où de nouveau $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Alors

$$|f(x) - f_{T,k}(x)| \leq \sup_{y \text{ entre } 0 \text{ et } x} \{|f^{(k+1)}(y)|\} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Si on veut donc savoir si (et comment) l'approximation f_T de f s'approche effectivement de f , il faut qu'on contrôle de quelque sorte la croissance des dérivées autour de f .

Exemples 2.5.8. • Considérons la fonction exponentielle $f = \text{Exp}$, où $\text{Exp} : x \mapsto e^x$. On sait que $\text{Exp}' = \text{Exp}$ et $\text{Exp}(0) = 1$. Par récurrence, on obtient que les coefficients de la série de Taylor associée sont $a_n = \frac{\text{Exp}^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$,

donc on obtient $\text{Exp}_T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$. On a alors que pour $k \geq 0$

$$\begin{aligned} |\text{Exp}(x) - \text{Exp}_{T,k}(x)| &\leq \sup_{y \text{ entre } 0 \text{ et } x} \{|\text{Exp}(y)|\} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \\ &\leq \frac{\text{Exp}(|x|)|x|^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

comme Exp est une fonction croissante. Alors pour x fixé, on a que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

(Exercice !). On obtient donc que pour tout x , la fonction Exp est égale à sa série de Taylor associée.

- Considérons la fonction f qui envoie x à $\text{Exp}(-\frac{1}{x^2}) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Si $x = 0$, on définit $f(0) = 0$. Par récurrence, on peut montrer que f admet des dérivées de tout ordre : la k -ième dérivée est de la forme $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P_k est un polynôme, et où la valeur en 0 est défini comme 0. (Convainquez-vous que ces fonctions sont bien continues et dérivables !) En particulier, on voit que tous les termes a_n dans la série de Taylor associée sont 0, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$. Donc à part de $x = 0$, la fonction f n'est nul part égale à sa série de Taylor associée, comme $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

2.6 Comportement sur le bord

Une fois qu'on a déterminé le rayon de convergence R d'une série entière, on connaît complètement la convergence/divergence de la série pour les valeurs $x \neq R$ ou $x \neq -R$. Par contre, la convergence/divergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$ est une chose assez subtile à déterminer ! On peut considérer ces points comme des points critiques qui séparent deux régimes - juste comme 0 degrés est le point critique qui sépare la glace de l'eau.

Néanmoins, le comportement sur le bord a quand même une propriété qui compense ses défauts : si on *sait* (de n'importe quelle manière) que la série converge dans un des deux points critiques, alors on peut déterminer la limite de la série en termes des valeurs de la série dans la zone non-critique. L'énoncé exact est comme suit.

Théorème 2.6.1 (Théorème d'Abel). *Supposons que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est une série entière, et R son rayon de convergence. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge. Alors $\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} f(x)$ existe, et est égale à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.*

De même, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ converge, on a que $\lim_{\substack{x \rightarrow -R \\ x > -R}} f(x)$ existe, et est égale à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

Formulé autrement, le théorème dit que, si notre série formelle est convergente au point R , on peut étendre f (d'une manière unique) à une fonction continue sur $(-R, R]$.

Exemple 2.6.2. Considérons la série entière $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n$. On sait que cette série a rayon de convergence $R = 1$, et on a aussi déterminé que $f(x) = \ln(1-x)$ pour tout $-1 < x < 1$. Alors si on regarde la valeur $x = 1$, on sait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente par le critère de Leibniz. Le théorème d'Abel nous garantit alors que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = \ln(2). \end{aligned}$$

De nouveau, ce théorème nous garantit en quelque sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté en mêlant les notations pour les séries entières formelles et les fonctions associées.

Attention! Pour que le théorème d'Abel soit vrai, il est nécessaire qu'on sait déjà que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge! Si on ne sait pas que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, on n'a pas le droit de l'appliquer!

En effet, considérons la série géométrique

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Donc en mettant cette

valeur dans la série, on obtient la série *divergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

la *série de Grandi*. Par contre, si on prend $0 < x < 1$, on a que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ converge, avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

et si x tend vers 1, on arrive à la valeur $\frac{1}{2}$. Si on pourrait appliquer le théorème d'Abel dans ce cas, cela mènerait à la conclusion que...

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

J'espère que vous êtes d'accord que c'est un résultat un peu absurde, bien qu'on pourrait construire un argument pour le justifier (les valeurs fluctuent entre 0 et 1, donc 'en moyenne' la valeur est 1/2). En tout cas, cela montre clairement que la théorie des séries est assez subtile!⁵

Au bout de compte, pourquoi résister à l'impulse mathématique d'accepter tout phénomène bizarre et de le rendre en définition?

Définition 2.6.3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série formelle. On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge dans le sens d'Abel si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour tout $0 < x < 1$, et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe. On note alors

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Le théorème d'Abel nous dit alors que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (dans le sens normal), il converge aussi dans le sens d'Abel, et

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Par contre, l'exemple ci-dessus montre qu'une série peut converger dans le sens d'Abel, même si elle ne converge pas dans le sens normal.

5. "Les séries divergentes sont le travail du diable, et c'est honteux qu'on fonde des démonstrations sur elles. On peut arriver à n'importe quoi en les utilisant, et c'est elles qui ont créé tant de malheur et tant de paradoxes." (Niels Henrik Abel, 1826)

2.7 Somme et produit de séries entières

On a déjà vu comment additionner et multiplier les séries formelles. Qu'est-ce qu'on peut dire alors des rayons de convergence associés à la somme et au produit ?

Proposition 2.7.1. *Soit f et g deux séries entières, avec rayons de convergence respectifs R_f , R_g et R_{f+g} . Soit R_{f+g} le rayon de convergence de leur somme.*

Dans le cas où $R_f \neq R_g$, on a que

$$R_{f+g} = \min\{R_f, R_g\}.$$

Si par contre $R_f = R_g = R$, on peut en général seulement dire que $R_{f+g} \geq R$.

Exemples 2.7.2. • Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$, et $g = -f = \sum_{n=0}^{\infty} -X^n$. Alors les rayons de convergence de f et g sont $R_f = R_g = 1$. Par contre, $f + g = 0$, ce qui a rayon de convergence $R_{f+g} = +\infty$.

- Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$, et $g = \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n$. De nouveau, les rayons de convergence de f et g sont $R_f = R_g = 1$. Par contre, maintenant on a $f + g = 2 \sum_{n=0}^{\infty} X^{2n}$, et on trouve que $R_{f+g} = 1$.

Passons au produit.

Proposition 2.7.3. *Soit f et g deux séries entières formelles, avec rayons de convergence respectifs R_f et R_g . Alors le rayon de convergence R_{fg} de leur produit satisfait*

$$R_{f \cdot g} \geq \min\{R_f, R_g\}.$$

En plus, si $|x| < \min\{R_f, R_g\}$, on a que

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

La dernière partie de la proposition précédente nous dit que le produit de deux séries entières correspond précisément au produit des fonctions correspondantes si elles sont tous les deux bien définies en x .

Exemples 2.7.4. • Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ et $g = 0$. Alors $fg = 0$, et on a $+\infty = R_{fg} \geq \min\{R_f, R_g\} = \min\{1, +\infty\} = 1$.

- Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)X^n = \frac{1}{(1-X)^2}$, et $g = 1 - X$. Alors $R_f = 1$, $R_g = +\infty$, mais $fg = \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ a rayon de convergence 1. En tout cas, on voit que de nouveau $1 = R_{fg} \geq \min\{R_f, R_g\} = \min\{1, +\infty\} = 1$.

- Comme dernier exemple, prenons

$$\begin{aligned} f &= \frac{1+X}{1-X} \\ &= (1+X) \sum_{n=0}^{\infty} X^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2X^n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g &= \frac{1-X}{1+X} \\ &= (1-X) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n X^n. \end{aligned}$$

Alors $R_f = R_g = 1$, pendant que $fg = 1$ donc $R_{fg} = +\infty$. Néanmoins, l'inégalité $+\infty = R_{fg} \geq \min\{R_f, R_g\} = \min\{1, 1\} = 1$ est de nouveau satisfait.

2.8 Exemples de séries entières

Dans cette section, nous considérons quelques séries entières particulières qui sont assez importantes à connaître. Les fonctions associées correspondront à des fonctions qui vous sont déjà connues, au moins intuitivement. Les formes entières associées sont cependant utiles pour démontrer certaines propriétés.

2.8.1 Fonction exponentielle

Considérons la suite

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

où nous nous rappelons que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Le rayon de convergence de la série entière associée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ est ∞ , en utilisant par exemple la version d'Alembert de Proposition 2.4.3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une fonction sur $\mathbb{R}$, appelée *fonction exponentielle* :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} x^n.$$

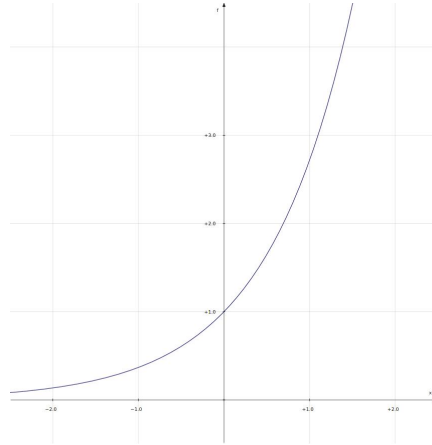
Cela est la manière la plus économique pour introduire la fonction exponentielle, mais, comme souvent dans les mathématiques, cette définition sèche cache un peu l'intuition.

Nous avons les propriétés suivantes de la fonction exponentielle :

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y, \tag{2.1}$$

$$\exp 0 = 1. \tag{2.2}$$

La deuxième propriété se démontre facilement en utilisant le Théorème 5.1.2, le théorème de Fubini : comme, pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$, les séries numériques

FIGURE 2.1 – Graphe de $\exp$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ convergent absolument, nous avons

$$\begin{aligned}
 \exp(x) \exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \right) \\
 &\stackrel{\text{produit de Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m} \right) \\
 &\stackrel{\text{binôme de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n \\
 &= \exp(x+y).
 \end{aligned}$$

Nous nous rappelons que le nombre

$$e = \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

est appelé *nombre de Euler*. Rappelons-nous aussi que pour tout $x > 0$, $m \geq 0$ et $n > 0$, nous pouvons définir $x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$. De l'équation (2.1), on déduit alors que

$$\exp q = e^q$$

pour $q \in \mathbb{Q}$. Alors on définit en général

$$e^a := \exp a, \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}.$$

Plus tard, nous verrons comment nous pouvons remplacer e par quelconque $x > 0$.

La fonction exponentielle se caractérise aussi par le fait que cette fonction est égale à sa propre dérivée :

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Aussi cette propriété est immédiate en utilisant la définition par série entière : en utilisant Proposition 2.5.1, on obtient

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

Remarquons finalement que la fonction exponentielle est croissante, et qu'elle induit une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_0^+$.

2.8.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions $\cos$ et $\sin$, le *cosinus* et *sinus*, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

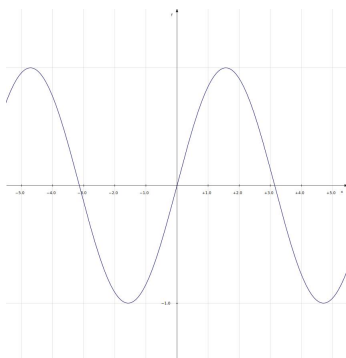


FIGURE 2.2 – Graphe de sin

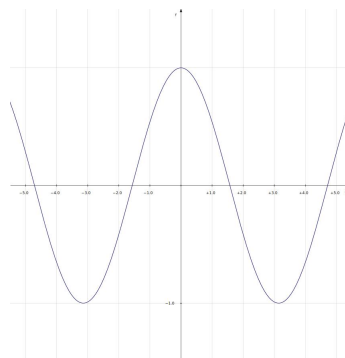


FIGURE 2.3 – Graphe de cos

Les définitions par séries entières nous permettent de calculer sans difficultés les formules suivantes pour les dérivées de sin et cos, naturellement bien connues :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

On a que cos et sin sont des fonctions *périodiques* avec période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Cette périodicité n'est par contre pas très facile à vérifier directement de la forme en série entière.

Les fonctions cos et sin ne sont pas 'indépendantes' l'une de l'autre. Elles satisfont la relation fonctionnelle suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

En plus, on a que

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Nous étudierons les fonctions périodiques générales en plus de détail dans le troisième chapitre, mais finissons avec la remarque suivant. Nous avons la

relation suivante entre les fonctions trigonométriques et la fonction exponentielle :

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \quad (\text{Formule d'Euler}).$$

Ici, on utilise le nombre imaginaire i , qui satisfait la loi $i^2 = -1$ (mais avec lequel on peut pour le reste calculer comme avec n'importe quel nombre réel). En particulier, on obtient pour $x = \pi$ l'identité fameuse d'Euler

$$e^{i\pi} = -1.$$

Exercice : Montrer la formule d'Euler en utilisant les séries entières associées. (Évidemment, cette démonstration cache un peu la majesté et la profondeur de la formule !)

De la formule d'Euler, on peut aussi aisément déduire les formules suivantes qui expriment cos et sin en termes de exp :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad (2.3)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \quad (2.4)$$

2.8.3 Fonctions hyperboliques

Les fonctions cosh et sinh, le *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, parfois notées aussi ch est sh, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \\ \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Le graphe de la fonction cosh est connue comme *une chaînette* : à part une reparamétrisation, c'est la forme que prend une chaîne suspendue de masse homogène (en supposant que la force de gravité est aussi uniforme).

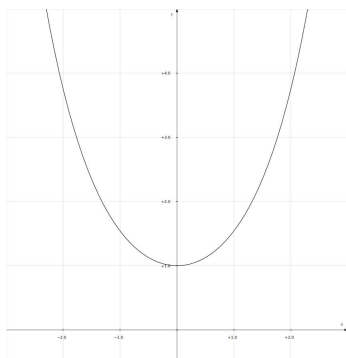


FIGURE 2.4 – Graphe de cosh

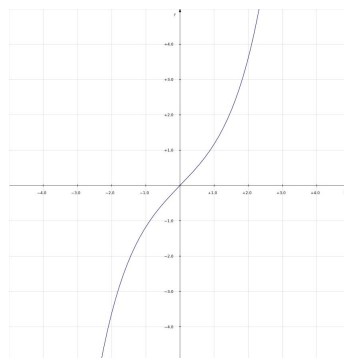


FIGURE 2.5 – Graphe de sinh

2.8.4 Fonction logarithmique

La fonction logarithmique est définie comme la fonction inverse de la fonction exponentielle. Cela veut dire que

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_0^+,$$

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

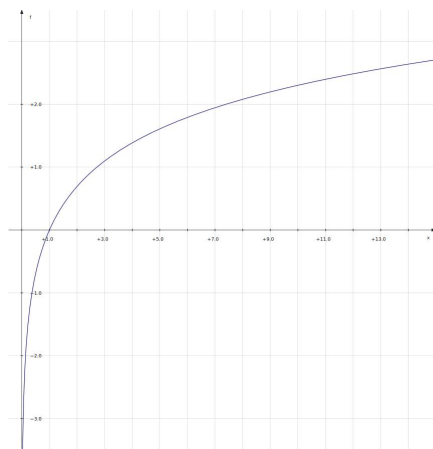


FIGURE 2.6 – Graphe de ln

Alors on peut définir, pour $a > 0$,

$$a^x = e^{\ln(a)x}.$$

Considérons maintenant la suite

$$(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Nous calculons, avec le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence est 1.

Proposition 2.8.1. *Pour tout $x \in (-1, 1)$, on a que*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Démonstration. On a $\exp(\ln(x)) = x$. En prenant la dérivée avec l'aide de la règle de la chaîne⁶, on obtient $\exp'(\ln(x)) \ln'(x) = 1$. Comme $\exp' = \exp$, on obtient $x \ln'(x) = 1$, donc

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Si donc $h(x) = \ln(x+1)$ pour $x \in (-1, +\infty)$, nous avons que

$$h'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Mais pour $x \in (-1, 1)$, nous pouvons développer $\frac{1}{x+1}$ en série entière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

Par contre, nous savons que

$$g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

6. On se rappelle que la règle de la chaîne dit que si $h(x) = f(g(x))$, alors $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

définit aussi une fonction dérivable, et nous calculons que

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
 &= \frac{1}{1+x}.
 \end{aligned}$$

Il suit que la fonction $h(x) = \ln(x+1)$ et la fonction

$$x \in (-1, 1) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

ont la même dérivée. Il existe donc une constante C telle que

$$\ln(x+1) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Mais comme $\ln(1) = 0$, nous voyons que $C = 0$, et nous avons démontré la proposition ci-dessus. $\square$

Exercise : Soit $a > 0$. Déterminer la série entière de la fonction $x \mapsto a^x$. Calculer aussi la dérivée de cette fonction.

Chapitre 3

Séries de Fourier

Dans le dernier chapitre, nous avons traité les séries entières. Elles peuvent être considérées comme des généralisations de polynômes. Dans ce chapitre-ci, nous allons étudier les généralisations des fonctions trigonométriques et de leurs combinaisons linéaires. Il s'agit d'une théorie qui est très importante pour l'analyse des signaux périodiques. En effet, il s'avère que tout signal périodique se décompose, dans un sens assez précis, dans des signaux plus élémentaires. On dit que le signal est une *superposition* de ces signaux élémentaires. La décomposition en parties élémentaires s'appelle parfois 'décomposition spectrale'. La théorie associée s'appelle *théorie de Fourier*.

Ainsi, la différence de son entre des instruments qui jouent une même note (un 'la', un 'do') se trouve dans l'intensité (l'amplitude) avec laquelle des signaux élémentaires (les harmoniques de la note de base) se trouvent dans ce ton.¹ Plus techniquement, les *coefficients de Fourier* d'une certaine note diffèrent d'un instrument à une autre. Une telle analyse se fait aussi pour la lumière, que se décompose en ondes élémentaires de fréquences différentes. À partir d'une analyse spectrale pour la lumière d'une étoile par exemple, on peut déduire les constituents chimiques qui se trouvent dans l'étoile. Cependant, il y a une différence importante avec l'analyse spectrale pour les notes d'instruments (plus précisément, les instruments à cordes et les instruments

1. Si vous êtes intéressé dans les liens entre la musique et les mathématiques, je vous conseille le livre 'Music : A mathematical offering' de D. Benson, dont on peut trouver une version gratuite (en anglais) sur le site web <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html>

à vent), comme les fréquences qui se trouvent dans une raye de lumière ne sont en général pas de multiples entiers d'une fréquence de base. On dit qu'ils forment un *spectre continu*. Comme le traitement de ces ondes est un petit peu plus compliqué, on ne traitera pas cette théorie.

La théorie ne s'arrête pas là. Une découverte d'une importance difficile à surestimer, et qui forme la base de la *mécanique quantique*, est qu'aussi tout élément fondamentale se comporte, en quelque sorte, comme une (superposition d')onde(s). De cette manière, l'analyse spectrale et la théorie de Fourier est un outil indispensable si on veut sonder les fondements de la nature.

3.1 Coefficients de Fourier

Définition 3.1.1. Soit f une fonction, et T un nombre. On dit que f est T -périodique si on a $f(x + T) = f(x)$ pour tout x .

Cela veut dire que si on regarde le graphe de cette fonction, et on le pousse T unités à droite ou à gauche, on obtient le même graphe.

Exemples 3.1.2. • Les fonctions trigonométriques $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

- La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - [x]$$

est 1-périodique, où $[x]$ est le nombre entier le plus grand qui est plus petit que x , donc $[2,364] = 2$, $[\pi] = 3$, $[\frac{1}{3}] = 0$.

- Un 'la' pure a une fréquence de 440Hz. Cela veut dire que les pressions d'air que produit ce son (à un endroit particulier fixé) se répètent 440 fois par seconde. La pression d'air à ce point, en fonction de temps (mesuré en secondes), sera alors une fonction sinusoïdale avec une période de $1/440$.

Comme énoncé dans l'introduction, on aimerait décomposer chaque fonction $x \mapsto f(x)$ qui est T -périodique comme combinaison linéaire de fonctions T -périodiques 'élémentaires'. Ces fonctions élémentaires seront

1. La fonction constante, $x \mapsto 1$,
2. Les fonctions $x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$, où $n \in \mathbb{N}_0$ (les entiers positifs sans zéro),

3. Les fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$, où $n \in \mathbb{N}_0$.

Donc, on voudrait écrire

$$f(x) = c \cdot 1 + (a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right) + \dots) + (b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right) + \dots),$$

où $c, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ sont des nombres. Comment y arriver ?

La propriété fondamentale des fonctions ci-dessus dont on aura besoin pour ceci est leur *orthogonalité*.

Proposition 3.1.3. *On a que*

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx &= 0 \quad \text{pour } n \geq 1, \\ \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx &= 0 \quad \text{pour } n \geq 1, \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx &= 0 \quad \text{pour } n, m \geq 1 \text{ et } n \neq m, \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx &= 0 \quad \text{pour } n, m \geq 1, \\ \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx &= 0 \quad \text{pour } n, m \geq 1 \text{ et } n \neq m. \end{aligned}$$

Par contre, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T 1 dx &= T, \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)^2 dx &= \frac{T}{2}, \quad n \geq 1 \\ \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)^2 dx &= \frac{T}{2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons que $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx = 0$ si $n \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx &= \frac{T}{2\pi n} \int_0^T d \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \\ &= \frac{T}{2\pi n} [\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)]_0^T \\ &= \frac{T}{2\pi n} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{T}T\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{T}0\right) \right) \\ &= \frac{T}{2\pi n} (\sin(2\pi n) - \sin(0)) \\ &= \frac{T}{2\pi n} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Démontrons que $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = 0$. On a que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x + \frac{2\pi m}{T}x\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x - \frac{2\pi m}{T}x\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi(n+m)}{T}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}x\right) \right). \end{aligned}$$

Comme $n \neq m$, on obtient de la démonstration de la première paragraphe que $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = 0$.

Démontrons que $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)^2 dx = \frac{T}{2}$. De l'identité ci-dessus, on obtient que

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{4\pi n}{T}x\right) + 1 \right).$$

En prenant l'intégrale de 0 à T , le premier terme disparaît, et le deuxième terme nous donne $\frac{1}{2} \int_0^T dx = \frac{T}{2}$. Donc $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)^2 dx = \frac{T}{2}$.

Les autres identités se trouvent de la même manière, en utilisant les autres identités pour les produits de fonctions trigonométriques. $\square$

Petite digression sur la notion d'orthogonalité. Vous vous rappelez de la notion de 'grandeur' l^2 qu'on avait introduit pour les suites dans le premier chapitre ? On peut fabriquer une même notion de grandeur pour les fonctions T -périodiques, en mettant $\|f\|_2 = \sqrt{\left(\int_0^T |f(x)|^2 dx\right)T}$. De même, on peut prendre un produit scalaire entre fonctions T -périodiques, $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)g(x)dx$. De nouveau, l'espace des fonctions

T -périodiques se comporte comme un espace euclidien de dimension infinie ! La proposition ci-dessus nous dit alors que les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ sont des 'vecteurs orthogonaux' dans cet espace euclidien.

Comment est-ce que la proposition ci-dessus nous aide à décomposer une fonction périodique ? Supposons d'abord qu'on a une fonction périodique de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= c + \left(a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right) \\ &\quad + \left(b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right) + \dots + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right) \\ &= c + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \end{aligned}$$

donc f est une combinaison linéaire finie de nos fonctions élémentaires. On aimerait déterminer les coefficients c , a_k et b_k *directement* en termes de f . Alors, ici l'orthogonalité vient à notre aide. Regardons par exemple $\int_0^T f(x)dx$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x)dx &= \int_0^T cdx + \sum_{k=1}^n a_k \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n b_k \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx \\ &= cT + \sum_{k=1}^n 0 + \sum_{k=1}^n 0 \\ &= cT. \end{aligned}$$

On voit donc qu'on peut récupérer le coefficient c à partir de f :

$$c = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

La même méthode nous permet de montrer que pour tout $k \leq n$, on a

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx.$$

Exercice : Démontrer les identités ci-dessus.

La discussion ci-dessus devrait être assez de motivation pour introduire la définition ci-dessous.

Définition 3.1.4. Soit f une fonction T -périodique. On appelle coefficients de Fourier de f , relatifs à la période T , les réels suivants.²

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier associée à f la série (formelle) de fonctions suivante

$$S_f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right).$$

Attention! Cette définition dépend de la choix de T .

Remarque 3.1.5. Au lieu de $\int_0^T$, on peut aussi prendre l'intégrale $\int_c^{c+T}$ où $c \in \mathbb{R}$ est arbitraire. Exercice : démontrer ce fait, à partir de la périodicité des fonctions intégrées. Est-ce que vous pouvez visualiser l'égalité à partir du graphe des fonctions ?

On soupçonne maintenant peut-être qu'on a toujours $S_f(x) = f(x)$... Hélas, une fois qu'on admet des fonctions T -périodiques générales, la série (infinie !) $S_f(x)$ ne se comporte pas toujours si bien qu'on voudrait. Néanmoins, c'est assez surprenant qu'elle se comporte bien dans beaucoup de cas, comme montre la proposition ci-dessous.

Théorème 3.1.6 (Dirichlet). Soit f une fonction T -périodique avec la fonction dérivée continue. Alors $S_f(x)$ converge pour tout x , et

$$S_f(x) = f(x).$$

2. On suppose ici que la fonction f est telle que les intégrales suivantes sont bien définies.

Le théorème nous dit donc que si f est une fonction T -périodique et S_f sa série de Fourier formelle associée, la série de fonctions S_f converge en fait *simplement* vers la fonction f .

On peut aller un petit peu plus loin.

Théorème 3.1.7 (Dirichlet, version générale). *Soit f une fonction T -périodique qui est composée de pièces de fonctions avec dérivées continues. Alors*

$$S_f(x) = \frac{1}{2} (f(x_+) + f(x_-)),$$

où on écrit $f(x_+) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ et $f(x_-) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$.

En disant que f est composée de pièces de fonctions avec dérivées continues, on veut dire que le graphe de f est de l'apparence ci-dessous.³

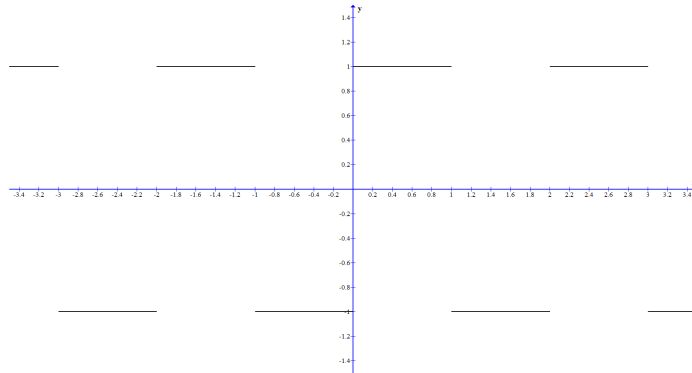


FIGURE 3.1 – Graphe 1

Intuitivement, ça devrait être clair pourquoi la valeur $f(x)$ ne peut pas être récupérée de $S_f(x)$ dans les points de discontinuité : les coefficients de Fourier sont obtenus à partir d'une intégrale, qui ne voit pas ('ne s'intéresse pas') à la valeur précise qu'une fonction prend dans un point de discontinuité.

3. Les conditions précises sont : f est continue à part un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle de période T , dans lesquels on a néanmoins que les limites $f(x_+) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ et $f(x_-) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existent. En plus, dans chaque point on peut prendre les dérivées à gauche et à droite, c'est-à-dire dans chaque point les limites $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x_+)}{y - x}$ et $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x_-)}{y - x}$ existent.

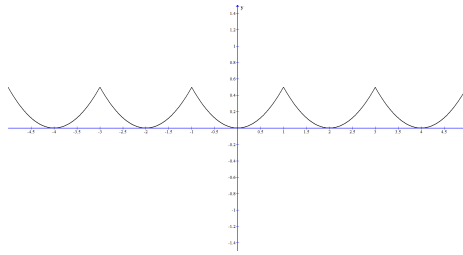


FIGURE 3.2 – Graphe 2

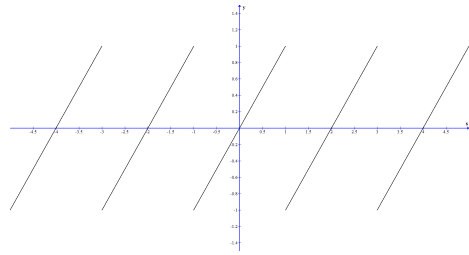


FIGURE 3.3 – Graphe 3 (Dérivée de graphe 2)

Si la fonction f admet une certaine symétrie, on peut conclure que certains coefficients de Fourier sont zéro. On se rappelle que f est dite *fonction paire* si

$$f(-x) = f(x) \quad \text{pour tout } x,$$

et que f est dite *fonction impaire* si

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{pour tout } x.$$

Proposition 3.1.8. *Soit f une fonction T -périodique.*

Si f est paire, les coefficients de Fourier b_n sont zéro, pendant que

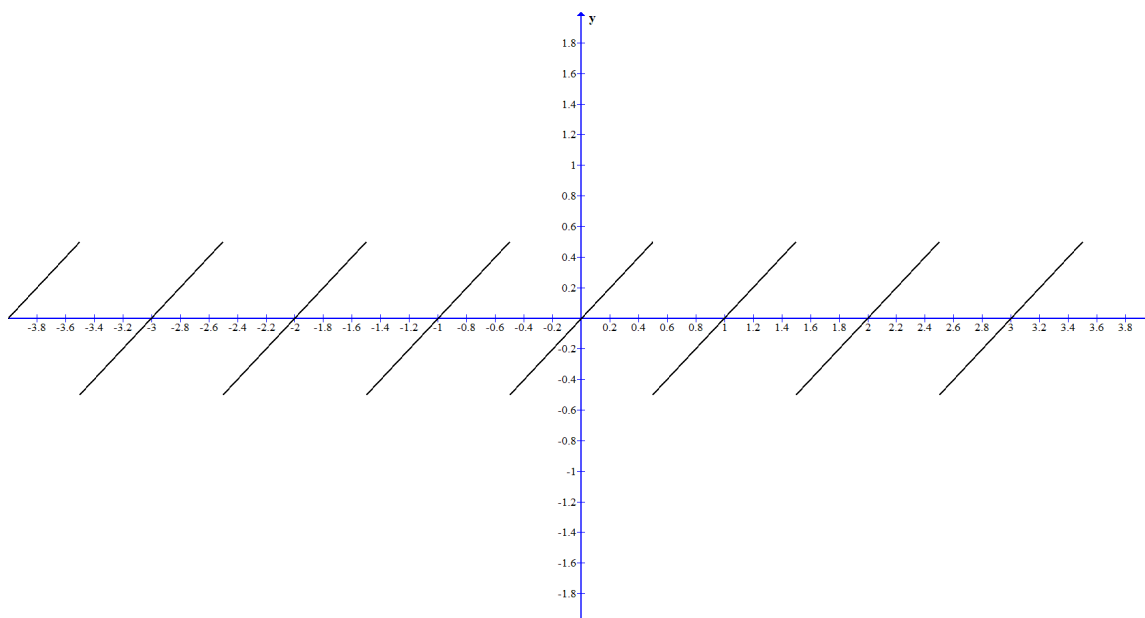
$$\begin{aligned} c &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Si f est impaire, les coefficients de Fourier c et a_n sont zéro, pendant que

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Exemple 3.1.9. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x - \lfloor (x + \frac{1}{2}) \rfloor.$$

FIGURE 3.4 – Graphe de f

La fonction f ci-dessus est 1-périodique. Comme f est impaire, les coefficients de Fourier a_n sont zéro. Pour les coefficients b_n , nous voyons que

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} x \sin(2n\pi x) dx \\
 &\stackrel{IP}{=} -\frac{1}{n\pi} ([x \cos(2n\pi x)]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2n\pi x) dx) \\
 &= -\frac{(-1)^n}{n\pi}.
 \end{aligned}$$

Le théorème suivant nous permet de calculer certaines séries de nombres en les réalisant comme coefficients de Fourier.

Théorème 3.1.10 (Égalité de Parseval). *Si f est T -périodique et les c , a_n , b_n sont ses coefficients de Fourier, on a que*

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2|c|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

Remarquez qu'il n'y a pas de conditions sur f comme dans le théorème de Dirichlet !

Exercice : Démontrer l'égalité dans le théorème 3.1.10 pour les fonctions de la forme

$$f(x) = c + \sum_{k=0}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + \sum_{k=0}^n b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right).$$

Exemple 3.1.11. Considérons de nouveau la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

On a calculé que

$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n\pi},$$

pendant que $c = 0$ et $a_n = 0$ pour tout n . L'égalité de Parseval nous donne donc la formule suivante, connue déjà par L. Euler en 1739.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice : Démontrer l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en appliquant le théorème de Dirichlet, dans un point bien choisi, à l'unique fonction de période 2π qui satisfait

$$f(t) = t^2 \quad \text{pour } -\pi < t \leq \pi.$$

Remarque 3.1.12. Disons un mot sur *le phénomène de Gibbs*, qu'on peut apercevoir en approchant une fonction discontinue avec sa série de Fourier. Par exemple, considérons la fonction impaire et 2π -périodique f qui est déterminée sur l'intervalle $(0, \pi)$ par $f(x) = 1$.

Cette fonction a une discontinuité dans le point 0. On calcule que la série de Fourier de f est donnée par

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x).$$

Le théorème de Dirichlet nous dit alors que pour tout point $x \in]0, \pi[$, on a $f(x) = S_f(x)$, pendant que dans le point 0, nous avons

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{f(0+) + f(0-)}{2} \\ &= \frac{1 + (-1)}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pourtant, si nous regardons des approximations de f avec les sommes partielles $S_f^N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$, nous observons un comportement curieux.

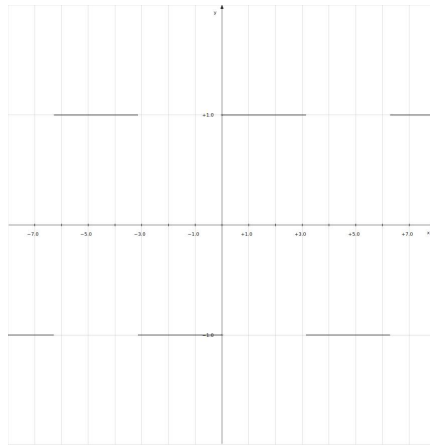


FIGURE 3.5 – Graphe de la fonction f

On voit que, bien que dans tout point $S_f^N(x)$ tend vers $f(x)$, cette convergence n'est pas uniforme : dans toute approximation, on a que le sommet reste à plus ou moins la même hauteur, et 'voyage à gauche'. Ce comportement est connu comme 'phénomène de Gibbs', et se produit pour toute fonction avec une discontinuité.

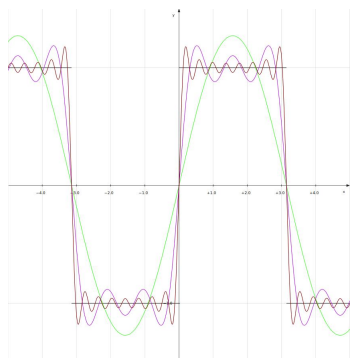


FIGURE 3.6 – Approximations S_f^N pour $N = 1, 5, 15$

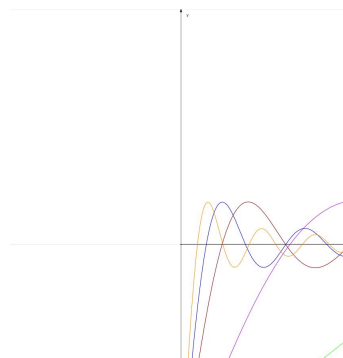


FIGURE 3.7 – Détail dans un voisinage de 0

Deuxième partie

Intégrales

L'intégration de fonctions continues sur des intervalles compacts, donc des intervalles de la forme $[a, b]$, est une opération assez régulière : elle nous donne toujours un nombre réel bien définie, elle obéit des règles de linéarité, ... En quelque sorte, elle correspond avec prendre une 'somme finie'. Par contre, une fois que nous admettons des autres intervalles, comme $[a, +\infty)$, nous rencontrons des problèmes qui sont similaires à ceux des séries : quelquefois ces intégrales peuvent être infinies, ou même pas bien définies. Dans cette partie, nous allons étudier ces problèmes dans un peu plus de détail.

On rencontre en plus des problèmes d'un autre type si on considère des fonctions à deux variables. Ici, on aimerait bien prendre des intégrales de fonctions définies sur des sous-ensembles deux-dimensionnels assez arbitraires du plan (comme des disques, parties entre deux graphes de fonctions, ...). Bien qu'il n'est pas trop difficile de donner un sens à ces intégrales, reste le devoir de les calculer ! L'outil le plus général et utile dans ce contexte d'*intégrales doubles* est le théorème de changement de variables : on essaie de 'déformer' notre domaine difficile vers un domaine plus simple (comme un carré, un triangle, ...).

Dans la dernière section, on regardera comment on peut intégrer des fonctions sur des sous-ensembles *un-dimensionnels* du plan - plus précisément (et plus intuitivement) comment intégrer des fonctions sur le trajet suivi d'un point dans le plan. Le théorème de Green-Riemann, auquel on arrivera au bout de ce cours, donnera alors un lien entre ces 'intégrales curvilignes' et les intégrales doubles.

Chapitre 4

Intégrales impropres

4.1 Intégrales propres

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. On se rappelle comment former l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

1. On coupe l'intervalle $[a, b]$ en n parties I_k de la même longueur $\frac{b-a}{n}$, donc $I_k = [a_k, a_{k+1}]$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k < n$.
2. On prend le minimum $m_{n,k}$ de f sur $[a_k, a_{k+1}]$.
3. On considère la somme $m_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_{n,k}$.
4. On laisse n tendre à l'infini, et on définit $\int_{a,b} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$.

En termes plus graphiques, on couvre la partie bornée par le graphe de la fonction f avec des collections de rectangles sous le graphe de plus en plus fines, et les aires de ces collections de rectangles nous donnent à la limite la valeur de l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Comme pour les dérivées, la définition d'une intégrale est surtout d'une importance théorique. En pratique, on a besoin de quelques règles de calcul.

- (Théorème fondamental de l'analyse.) Si F est une fonction continue avec dérivée continue f , alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

On écrit aussi

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b},$$

où donc $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ n'est rien autre que $F(b) - F(a)$.

- Si F et G sont des fonctions continues avec dérivées continues $F' = f$ et $G' = g$, alors

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

On écrit parfois aussi

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = \int_a^b F(x)dG(x)$$

et

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = \int_a^b G(x)dF(x),$$

et alors

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)g(x)dx &= \int_a^b F(x)dG(x) \\ &= [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b G(x)dF(x) \\ &= [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)G(x)dx. \end{aligned}$$

On y reconnaît alors plus directement la règle de produit pour les dérivées $(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$.

- Si h est une fonction dérivable, on a ¹

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx = \int_a^b f(h(x))h'(x)dx.$$

En plus, il est très utile de (re)connaître les intégrales les plus simples, comme par exemple

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1 \text{ et } a, b > 0 \text{ si } n < 0,$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b > 0,$$

$$\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(a),$$

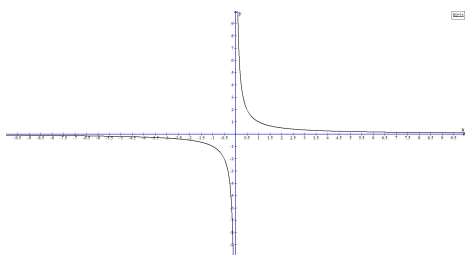
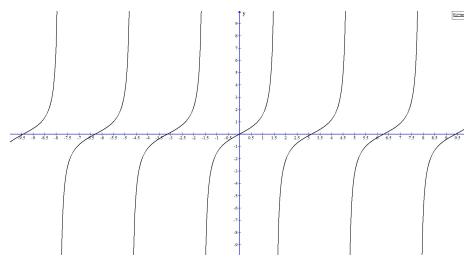
$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) - \arctan(a).$$

4.2 Intégrales impropres

On parle d'*intégrale impropre* si dans l'expression $\int_a^b f(x)dx$, on admet que $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$, ainsi que des fonctions f qui admettent des singularités, c'est-à-dire des points où la fonction f n'est pas définie, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ (le point $x = 0$ est une singularité) ou $x \mapsto \tan(x)$ (les points de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier sont des singularités).

Dans ces cas-là, on coupe l'intégrale autour de chaque singularité, et on exige que les limites d'intégrales qu'on obtient en s'approchant de *toute* singularité (de gauche *et* de droite) existent. Si une de ces limites n'existe pas, on dit que l'intégrale *diverge*. Dans le cas où l'intégrand (c'est-à-dire la fonction qu'on intègre) ne prend que des valeurs positives, on a que soit l'intégrale converge, soit l'intégrale diverge *vers* $+\infty$ (dans le sens que les intégrales approximatives deviennent ainsi large qu'on veut).

1. Si $b < a$, on définit $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

FIGURE 4.1 – La fonction $x \mapsto 1/x$ FIGURE 4.2 – La fonction $x \mapsto \tan(x)$

Attention ! La convergence d'une intégrale dépend non seulement de la fonction, mais aussi du domaine sur lequel on fait l'intégration.

Exemples 4.2.1. • Considérons $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$. L'intégrand admet une seule singularité dans 0 (la fonction tend vers $+\infty$ quand x se rapproche de 0). Pour voir si l'intégrale est convergente, on prend alors $1 > \varepsilon > 0$ et on regarde $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$ quand ε tend vers zéro. On calcule explicitement que

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_\varepsilon^1 \\ &= \ln(1) - \ln(\varepsilon) \\ &= -\ln(\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(\varepsilon) = -\infty$, on a que $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge (vers $+\infty$, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positif sur $(0, 1]$).

- Considérons $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$. Maintenant l'intégrand n'a pas de singularités sur le domaine d'intégration $[1, +\infty)$, mais ce domaine n'est plus borné. On regarde donc $\int_1^M \frac{1}{x} dx$ où on laisse $M > 1$ tendre vers l'infini. On a

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_1^M \\ &= (\ln(M) - \ln(1)) \\ &= \ln(M). \end{aligned}$$

Quand M tend vers l'infini, cette expression tend vers $+\infty$. Donc $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ diverge (vers l'infini).

- Considérons $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$. Ici, il y a la singularité dans 0 à considérer, ainsi que le comportement à $+\infty$. On découpe l'intégrale comme $\int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ (le point où on découpe précisément n'est pas important). Comme une des deux expressions (en fait, les deux) est divergente, aussi l'intégrale totale est divergente.
- Considérons $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$. On fait (implicitement) l'intégration *au-dessus* de la singularité 0. Pour en donner un sens, on doit le découper autour de cette singularité, donc on interprète $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$. Comme une des deux intégrales diverge, on a que $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ diverge.

Remarque 4.2.2. On pourrait avoir envie de dire que $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$, comme 'la partie négative (à gauche) s'annule avec la partie positive (à droite)'. Avec la définition qu'on utilise, on n'a pas le droit de le dire. Cependant, il y a la notion de 'valeur principale de Cauchy' pour une telle intégrale, où on considère la partie à gauche et à droite d'une intégrale 'en égale mesure'. Dans ce-cas là, il est nécessaire de spécifier qu'on utilise cette notion spéciale en mettant 'V.P.' (valeur principale) devant l'intégrale. On a alors par définition que, par exemple si f admet une seule singularité en 0,

$$\text{V.P.} \int_{-1}^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) f(x) dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{V.P.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left([\ln(-x)]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln(x)]_{\varepsilon}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln(\varepsilon) - \ln(\varepsilon)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Regardons maintenant quelques autres exemples.

Exemples 4.2.3. • Soit a un réel. Si $b \leq a \leq c$ ou b et/ou c l'infini, on a que $\int_b^c \frac{1}{x-a} dx$ est divergente. Si par contre $a < b < c$ avec b et c fini, on a

que l'intégrale est convergente avec

$$\int_b^c \frac{1}{x-a} dx = \ln(c-a) - \ln(b-a).$$

De même, si $b < c < a$ avec b et c fini, on a

$$\int_b^c \frac{1}{x-a} dx = \ln(a-c) - \ln(a-b).$$

- Soit p un réel avec $p \neq 1$. Est-ce que $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge ? On a pour $1 > \varepsilon > 0$ que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx &= \int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx \\ &= \frac{1}{-p+1} [x^{-p+1}]_{\varepsilon}^1 \\ &= \frac{1}{1-p} (1 - \varepsilon^{1-p}). \end{aligned}$$

On voit que la convergence de l'intégrale dépend de la valeur précise de p :

- Si $p > 1$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-p} = +\infty$, et l'intégrale est *divergente*.
- Si $p < 1$ on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-p} = 0$, et l'intégrale est *convergente* avec

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}.$$

- Soit de nouveau p un réel avec $p \neq 1$. Est-ce que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge ? Prenons maintenant $M > 1$. On trouve

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^M x^{-p} dx \\ &= \frac{1}{-p+1} [x^{-p+1}]_1^M \\ &= \frac{1}{1-p} (M^{1-p} - 1). \end{aligned}$$

De nouveau, la convergence dépend de la valeur précise de p :

- Si $p > 1$, on a $\lim_{M \rightarrow +\infty} M^{1-p} = 0$, donc l'intégrale est *convergente* avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}.$$

- Si $p < 1$, on a $\lim_{M \rightarrow +\infty} M^{1-p} = +\infty$, donc l'intégrale est *divergente*.
- Des résultats ci-dessus, on dérive que $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ est divergente pour *tout* p .
- Est-ce que $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ converge ? On découpe l'intervalle d'intégration dans les deux parties $(-\infty, 0]$ et $[0, +\infty)$, et on observe que la fonction n'admet pas de singularités. Alors pour $M > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx &= [\arctan(x)]_0^M \\ &= \arctan(M) - \arctan(0) \\ &= \arctan(M). \end{aligned}$$

Quand M tend vers l'infini, cette valeur tend vers $\frac{\pi}{2}$. Donc $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. Par symétrie (l'intégrand est une fonction paire), on a aussi que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. Donc l'intégrale au début est convergente avec

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

- Est-ce que $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1-x^2} dx$ converge ? L'intervalle d'intégration est non-borné des deux cotés, et on a aussi des singularités dans -1 et 1 . On découpe alors l'intervalle d'intégration dans les parties

$$(-\infty, -2], [-2, -1), (-1, 0], [0, 1), (1, 2] \text{ et } [2, +\infty).$$

Montrons alors que l'intégrale est divergente sur $(0, 1]$ (ce qui est suffisant pour conclure que l'intégrale du début est aussi divergente). En effet, on a que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{(1-x)}{(1+x)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}.$$

La partie $\frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$, donc son intégrale est bien définie. Cependant, la partie $\frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$ a une singularité 'non-intégrable' autour de 1 , comme montre le premier exemple ci-dessus. Donc $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$ est divergente, ainsi que $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1-x^2} dx$.

- Est-ce que $\int_2^\infty \frac{1}{1-x^2} dx$ converge ? On pourrait soupçonner que non, en vue de l'égalité $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$ et le fait que $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ ne sont pas intégrables à l'infini. Mais faut faire attention qu'on *soustrait* ici deux quantités

positives ! Cela rend possible que les contributions à l'infini des deux quantités s'annulent en quelque sorte. En fait, c'est exactement ce qui se passe, et on peut aussi le motiver en disant que $\frac{1}{1-x^2}$ se comporte comme $-\frac{1}{x^2}$ à l'infini, dont on a vu que c'est une fonction intégrable à l'infini.

Faisons le calcul de l'intégrale explicitement. Prenons $M > 2$. On a

$$\begin{aligned} \int_2^M \frac{1}{1-x^2} dx &= \int_2^M \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^M \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{2} \int_2^M \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x+1)]_2^M - \frac{1}{2} [\ln(x-1)]_2^M \\ &= \frac{1}{2} (\ln(M+1) - \ln(3)) - \frac{1}{2} (\ln(M-1) - \ln(1)) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(M+1) - \ln(M-1)) - \frac{1}{2} \ln(3) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right) - \frac{1}{2} \ln(3). \end{aligned}$$

Alors si M tend vers l'infini, on a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right) = \ln \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M+1}{M-1} \right) = \ln(1) = 0.$$

Donc on trouve que

$$\int_2^\infty \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

4.3 Critères de convergence

La plupart des critères qu'on avait pour les séries ne se généralisent pas pour les intégrales. Même le critère le plus simple, qui disait qu'une série ne peut converger que si la suite associée tend vers zéro, n'est plus vrai !

Exercice : Soit $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que $f = 1$ sur $[n, n + \frac{1}{2^n}]$ pour tout entier positif n , et 0 sur le reste de son domaine. Vérifier que f ne

tend pas vers zéro à l'infini, bien que $\int_0^\infty f(x)dx = 2$. (Suggestion : faire le graphe de la fonction pour mieux la comprendre.)

Cependant, le critère le plus général, celui de la comparaison, vaut encore.

Proposition 4.3.1. *Soient f et g des fonctions² définies sur un intervalle $I = (a, b)$ (ou a et b peuvent être l'infini).*

Si $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et l'intégrale de g sur I converge, on a aussi que l'intégrale de f sur I converge, et

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Si par contre f est positive, $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et l'intégrale de f ne converge pas, aussi l'intégrale de g ne converge pas.

Exemple 4.3.2. Soient $a < b$ des nombres réels (donc pas l'infini), et f une fonction sur (a, b) . Supposons que f est bornée, ce qui veut dire qu'il existe $M > 0$ avec $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors en prenant $g(x) = M$ pour tout x , on voit que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout x . En plus, l'intégrale de g est convergente, comme $\int_a^b Mdx = M(b - a)$ (pour cela, nous avons besoin d'un intervalle fini !). On conclut que l'intégrale de f est convergente.

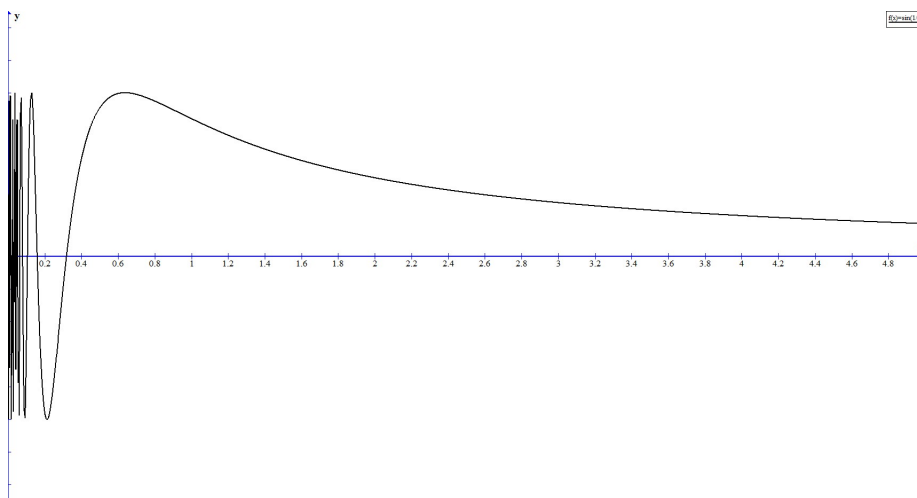
Par exemple, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus pour la fonction

$$(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Une autre application de cette proposition concerne les séries.

Proposition 4.3.3 (Comparaison série intégrale). *Soit f une fonction positive et décroissante sur $[1, +\infty)$ (donc $f(x) \leq f(y)$ si $x \leq y$). Alors l'intégrale $\int_1^\infty f(x)dx$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ est convergente.*

2. Dans ce chapitre, on suppose que tous les fonctions sont continues sauf sur un ensemble fini (ou dénombrable) de singularités. Cela garantit que nous ne rencontreront pas de problèmes de type technique en prenant nos intégrales.

FIGURE 4.3 – Graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$

Démonstration. On forme une nouvelle fonction g telle que $g(x) = f(n)$ si $x \in [n, n+1)$ pour un entier n . Alors comme f est décroissante, on a que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x (dessiner les graphes des deux fonctions!). Mais on calcule directement que $\int_1^\infty g(x)dx = \sum_{n=1}^\infty f(n)$. Si donc cette série converge, on a également que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge par le critère de comparaison.³

Pour montrer la direction opposée, nous modifions légèrement la situation. On définit maintenant $h(x) = f(n+1)$ si $x \in [n, n+1)$ pour un entier n . Maintenant $h(x) \leq f(x)$, pendant que $\int_1^\infty h(x)dx = \sum_{n=2}^\infty f(n)$. De nouveau, le critère de comparaison nous garantit la convergence de $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ (et donc de $\sum_{n=1}^\infty f(n)$) si $\int_1^\infty f(x)dx$ converge. $\square$

Exemple 4.3.4. On démontre ainsi facilement la convergence des séries $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est décroissante et positive, et $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ est bien convergente (par les calculs directs de la section précédente). En appliquant la proposition ci-dessus, on voit que la série ci-dessus est convergente.

Comme pour les séries, donnons une formulation plus quantitative du critère de convergence. On introduit d'abord une petite pièce de terminologie.

³. On n'écrit pas les valeurs absolues ici comme les fonctions sont déjà supposées positives.

Définition 4.3.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = (a, b)$. On dit que f est absolument intégrable si l'intégrale $\int_a^b |f(x)| dx$ est convergente.

Définition 4.3.6 (Notation de Landau). Soient f et g deux fonctions sur un intervalle $[a, b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Nous disons que f est dominée par g en b , et on écrit

$$f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$$

(ou simplement $f(x) = O(g(x))$ ou même $f = O(g)$ parfois), s'il existe un $c \in [a, b)$ et un $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour tout $x \in [c, b)$.

Nous disons que f est négligeable devant g en b , et on écrit

$$f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$$

(ou simplement $f(x) = o(g(x))$ ou même $f = o(g)$ parfois), s'il existe une fonction positive $\varepsilon : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et un $c \in [a, b)$ tels que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$ et $|f(x)| < \varepsilon(x)|g(x)|$ pour tout $x \in [c, b)$.

Nous disons que f et g sont similaires en b , et on écrit $f \sim_b g$, si à la même fois $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = O(f(x))$.⁴

Un critère facile pour voir si $f(x) = O(g(x))$ est comme suit.

Proposition 4.3.7. Soient f et g deux fonctions sur $[a, b)$ et supposons que g ne s'annule pas. Alors si la limite

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$$

existe, $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$. Si en plus cette limite n'est pas zéro, on a $f \sim g$, pendant que si la limite est zéro, on a $f = o(g)$.

Maintenant nous pouvons reformuler la Proposition 4.3.1 de la manière suivante.

4. Cette définition est différente de (et en fait plus générale que) la définition plus commune où on dit $f \sim_b g$ si $f(x) - g(x) = o(g(x))$.

Proposition 4.3.8. *Soient f et g deux fonctions sur un intervalle $[a, b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Si $f \sim_b g$, alors g est absolument intégrable sur $[a, b[$ ssi f est absolument intégrable sur $[a, b)$.

Si $f(x) = O_{x < b}(g(x))$, on a que f est absolument intégrable dès que g est absolument intégrable.

Exemple 4.3.9. Considérons l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

On voit aisément que

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

En plus, la règle d'Hôpital nous donne que

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = O_{x \rightarrow +\infty}(x^{-3/2}).$$

Comme $x^{-3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty]$, nous pouvons conclure que I est une intégrale convergente. (Remarquons que nous pouvons nous restreindre à l'intervalle $[1, +\infty]$ pour cette estimation, comme notre intégrale est déjà bien définie sur l'intervalle $[0, 1]$.)

Remarquons que nous avons comparé la fonction dessus avec une fonction de la forme $x \rightarrow x^\alpha$. En général, c'est une bonne idée de comparer une fonction donnée avec une fonction de cette forme.

Exercice : Montrer que $\int_1^{\infty} \sin(\frac{1}{x}) dx$ converge. (Suggestion : appliquer d'abord une transformation de variable $y = \frac{1}{x}$.)

Chapitre 5

Fonctions à deux variables

Quand on a introduit les suites, on a aussitôt considéré les *suites doubles*, c'est-à-dire les suites indexées par deux paramètres discrètes. Après, on a considéré les *suites de fonctions*, ce qui sont rien autres que des nombres indexés par deux paramètres dont un discret et un continu. Finalement, on peut naturellement aussi considérer les fonctions à deux paramètres continues.

Bien que ces trois notions peuvent vous paraître conceptuellement assez distinctes l'une de l'autre, il est parfois utile de les considérer comme appartenantes à une même famille. Pour illustrer, on verra dans la section suivante trois versions du théorème de Fubini, ce qui devrait vous convaincre qu'il pourrait effectivement exister une théorie générale qui inclut les cas ci-dessus comme cas spéciaux.¹

5.1 Théorèmes de Fubini

On rappellera d'abord le théorème de Fubini pour les suites doubles tel qu'on l'a vu dans le premier chapitre.

Théorème 5.1.1 (Théorème de Fubini pour les séries doubles). *Soit $(a_{mn})_{m,n}$ une suite double, et supposons qu'une des deux séries doubles $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}|$*

1. En effet, une telle théorie existe, et s'appelle 'théorie de la mesure'. On ne s'en occupera quand même pas en détail dans ce cours.

ou $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}|$ converge. Alors les séries doubles $\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn})$ ainsi que $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn})$ convergent, et

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

Passons maintenant à la situation des suites de fonctions.

Théorème 5.1.2 (Théorème de Fubini pour interchanger série et intégrale). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, et supposons que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ainsi que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ définissent des fonctions continues par morceaux (en particulier, on suppose que les séries données convergent pour tout x dans $[a, b]$). Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge, avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Ce théorème reste vrai si les fonctions concernées sont positives, même si les séries ou intégrales concernées sont divergentes ou si on prend des intervalles ouverts. Alors il peut y avoir un soucis pour définir les quantités (la série, l'intégrale), mais en pratique c'est assez clair comment on peut se débrouiller.

Exemple 5.1.3. Soit $f_n(x) = (-1)^n x^{2n}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

pendant que

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{3} (2n+1)}.$$

En plus, $|f_n(x)| = x^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| = \frac{1}{1-x^2}$, ce qui est une fonction intégrable sur $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. On peut donc conclure que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Comme

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0) = \frac{\pi}{6},$$

On conclut que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Finalement, considérons les fonctions de deux variables continues.

Théorème 5.1.4 (Théorème de Fubini). *Soient $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$. Soit f une fonction continue définie sur le rectangle $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Alors*

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy.$$

Définition 5.1.5. *Soit f une fonction continue sur le rectangle*

$$I = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2].$$

Nous définissons l'intégrale $\iint_I f(x, y) dx dy$ (ou $\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$) de f sur I comme

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy.$$

De nouveau, si les fonctions concernées sont positives, on peut admettre des singularités dans les fonctions, prendre des intervalles ouverts, etc. On mentionne aussi que, comme pour les fonctions d'une variable, cette intégrale va mesurer la volume borné entre le plan X - Y et le graphe de la fonction.

Nous avons donc réduit l'intégrale sur un rectangle à des intégrales successives sur des intervalles. Remarquons que néanmoins, dans des exemples concrets, un bon choix de l'ordre d'intégration peut considérablement simplifier les calculs. Par exemple, si on veut intégrer la fonction

$$f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \sin(xy^2),$$

il n'est pas clair ce qu'est $\int_{-1}^1 f(x, y) dy$, mais il est immédiat que $\int_{-1}^1 f(x, y) dx = 0$, comme $x \rightarrow f(x, y)$ est une fonction impaire pour tout y . Donc on peut

conclure que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dy dx &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pourrait juger le théorème 5.1.4 ‘bien évident’. Néanmoins, ce théorème n’est plus valable si nous prenons des hypothèses plus faibles, comme dans l’exemple suivant.

Exemple 5.1.6. Soit

$$f : (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{(x + y)^3}$$

On a que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{2x}{(x + y)^3} - \frac{1}{(x + y)^2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-x}{(x + y)^2} + \frac{1}{x + y} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y}{(x + y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(x + 1)^2} dx \\ &= \left[\frac{-1}{(x + 1)} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais si nous changeons l’ordre d’intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx \right) dy &= - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} dx \right) dy \\ &= -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

par symétrie. Donc pour cet exemple,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy,$$

bien que les deux côtés sont bien définis !

Dans l'exemple ci-dessus, le problème était plus ou moins que les parties positives et les parties négatives de la fonction s'annulent d'une manière différente dans l'intégrale double si on change l'ordre.

5.2 Dériver sous le signe d'intégrale

On a vu que, sous quelques hypothèses, on peut échanger l'ordre de deux opérations (prendre une série et après une intégrale, prendre une intégrale et après une autre, ...) Disons maintenant quelque chose sur l'inversion d'ordre entre intégration d'une variable et dérivation d'une autre.

Proposition 5.2.1. *Supposons que f est une fonction de $[a, b] \times (c, d)$ à $\mathbb{R}$,*

$$f : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \rightarrow f(x, t).$$

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe, et que les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont continues. Alors la fonction

$$F : (c, d) \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \int_a^b f(x, t) dx$$

est dérivable, et

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx, \quad \text{pour tout } t \in (c, d).$$

Donnons aussi un théorème plus élaboré qu'on peut appliquer pour des intégrales impropres.

Proposition 5.2.2 (Dériver sous le signe d'intégration). *Soient $a < b$ et $c < d$ nombres réels ou $\pm\infty$. Supposons donnée une fonction continue*

$$f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$f_y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x, y)$$

admet une intégrale impropre sur (a, b) pour tout $y \in (c, d)$. Supposons en plus que

- la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

existe et est continue, et

- il existe une fonction positive et continue par morceaux $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une intégrale impropre sur (a, b) et telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |h(x)| \quad \text{pour tout } x \in (a, b), y \in (c, d).$$

Alors si nous définissons

$$g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R} : g(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

on a que g est dérivable avec

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Les propositions dessus peuvent être utilisées pour évaluer certaines intégrales - une méthode connue sous le nom ‘dérivée sous le signe d’intégration’. L’idée est d’introduire dans une intégrale I un paramètre de plus, disons $\alpha \in [0, 1]$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$, telle que $I(\alpha)$ est alors une fonction dérivable de α avec $I(1) = I$. On calcule $I'(\alpha)$ avec la proposition ci-dessus, et on suppose aussi que $I(0)$ est facile à calculer. Alors on obtient, par le théorème fondamental de l’analyse, que $I = I(0) + \int_0^1 I'(\alpha) d\alpha$.

Exemple 5.2.3. Considérons l’intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

Nous avons déjà argumenté ci-dessus que $x \rightarrow \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty)$.

Pour calculer l’intégrale concrètement, introduisons la fonction

$$f : (0, \infty) \times (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : (x, \alpha) \rightarrow \frac{\ln(1+\alpha^4 x^2)}{1+x^2}.$$

Nous pouvons répéter le raisonnement de dessus pour voir que pour tout α , la fonction $x \rightarrow f(x, \alpha)$ est continue avec intégrale impropre convergente. En plus, nous avons que f est dérivable à la variable α , avec

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{4\alpha^3 x^2}{(1 + \alpha^4 x^2)(1 + x^2)},$$

ce qui est une fonction continue. Nous pouvons calculer le maximum de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ pour x fixé et α variable en mettant la dérivé par rapport à α égale à zéro. Cela donne que $f(x, -)$ obtient son maximum quand $\alpha^4 = \frac{3}{x^2}$, et donc

$$f(x, \alpha) \leq \frac{3^{3/4} x^{1/2}}{1 + x^2}.$$

Le comportement de cette dernière fonction à l'infini est $\sim 3^{3/4} x^{-3/2}$, ce qui est une fonction intégrable.

Nous avons maintenant vérifié toutes les hypothèses de la proposition précédente, donc nous sommes prêts à l'appliquer. En notant

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \alpha^4 x^2)}{1 + x^2} dx,$$

nous avons que $\alpha \rightarrow I(\alpha)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx \\ &= 4\alpha^3 \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1 + \alpha^4 x^2)(1 + x^2)} dx. \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 1$, nous avons

$$\frac{1}{(1 + \alpha^4 x^2)(1 + x^2)} = \frac{\frac{1}{1 - \alpha^{-4}}}{1 + \alpha^4 x^2} + \frac{\frac{1}{1 - \alpha^4}}{1 + x^2}.$$

Alors pour $R > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{x^2}{1 + x^2} dx &= \int_0^R 1 - \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= R - [\arctan(x)]_0^R \\ &= R - \arctan(R), \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\int_0^R \frac{x^2}{1 + \alpha^4 x^2} dx = \alpha^{-4} R - \alpha^{-6} \arctan(\alpha^2 R)$$

Cela nous donne enfin

$$\begin{aligned} 4\alpha^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + \alpha^4 x^2)(1 + x^2)} dx &= 4\alpha^3 \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \alpha^{-4}} (\alpha^{-4} R - \alpha^{-6} \arctan(\alpha^2 R)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \alpha^4} (R - \arctan(R)) \right) \\ &= 4\alpha^3 \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha^{-2}}{1 - \alpha^4} \arctan(\alpha^2 R) - \frac{1}{1 - \alpha^4} \arctan(R) \right) \\ &= \frac{2\pi\alpha}{1 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc, du théorème fondamentale de l'analyse,

$$\begin{aligned} I(\alpha) - I(0) &= \int_0^\alpha \frac{2\pi\beta}{1 + \beta^2} d\beta \\ &= \pi \int_0^\alpha d \ln(1 + \beta^2) \\ &= \pi \ln(1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1)}{1 + x^2} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$I(\alpha) = \pi \ln(1 + \alpha^2).$$

En particulier,

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx = I(1) = \pi \ln(2).$$

Chapitre 6

Intégrales doubles sur des domaines dans $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre, nous introduirons la théorie d'intégration de fonctions à plusieurs variables. Pour la facilité de l'exposition, nous nous restreignons aux fonctions de deux variables, mais on peut immédiatement généraliser les énoncés aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

6.1 Intégrales sur des domaines généraux

De la définition même, on peut aisément déduire la propriété de linearité suivante.

Proposition 6.1.1. *Soient $a_1 < a_2 < a_3$ et $b_1 < b_2$ des nombres réels. Notons*

$$I_1 = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2],$$

$$I_2 = [a_2, a_3] \times [b_1, b_2]$$

et

$$I = I_1 \cup I_2 = [a_1, a_3] \times [b_1, b_2].$$

Soit f une fonction continue définie sur I . Alors

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \iint_{I_1} f(x, y) dx dy + \iint_{I_2} f(x, y) dx dy.$$

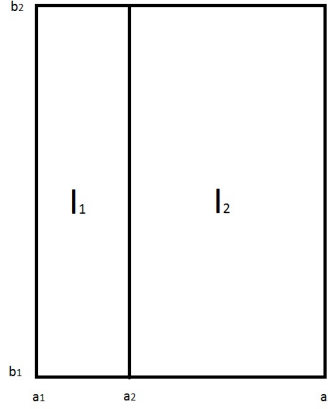


FIGURE 6.1 – Division d'un rectangle

Le même vaut naturellement pour une sous-division horizontale d'un rectangle, ou même une sous-division quelconque d'un rectangle.

Une idée naturelle se présente maintenant : pourquoi serait-ce nécessaire que la figure globale est un rectangle ? On peut bien prendre un ensemble arbitraire qui est composé d'un nombre fini de rectangles. Introduisons une pièce de terminologie pour ces ensembles.

Définition 6.1.2. Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Nous appelons I un polyrectangle s'il existe un nombre fini de rectangles $I_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ tel que $I = \cup_{i=1}^n I_i$. Nous appelons l'ensemble des I_i une sous-division de I . Nous disons qu'une sous-division est nette si $\overset{\circ}{I}_i \cap \overset{\circ}{I}_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, donc

$$((a_i, b_i) \times (c_i, d_i)) \cap ((a_j, b_j) \times (c_j, d_j)) = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j.$$

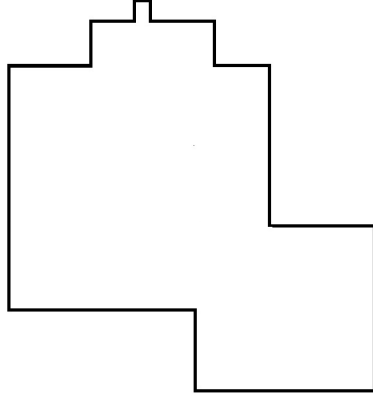


FIGURE 6.2 – Polyrectangle

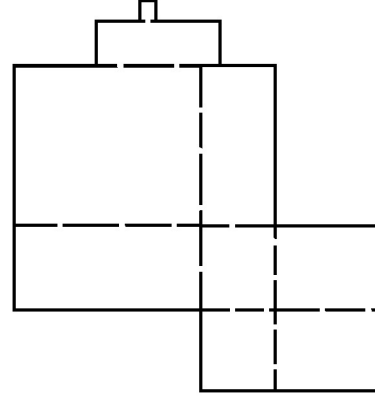


FIGURE 6.3 – Une sous-division nette

Remarque 6.1.3. Tout ensemble avec seulement un point, ainsi que l'ensemble vide, sont des polyrectangles.

La proposition suivante est intuitivement bien évidente.

- Proposition 6.1.4.**
1. Soit I un polyrectangle. Alors I admet une sous-division nette.
 2. L'intersection de deux polyrectangles est un polyrectangle.
 3. L'union de deux polyrectangles est un polyrectangle.

Nous sommes tentés maintenant de définir l'intégrale d'une fonction sur un polyrectangle comme la somme des intégrales sur une sous-division nette. Mais un problème se présente : un polyrectangle admet en général plusieurs sous-divisions nettes. Donc notre définition proposée nécessite la proposition suivante.

Proposition 6.1.5. Soit I un polyrectangle, et $\{I_i\}_{i:1 \rightarrow n}$ et $\{J_k\}_{k:1 \rightarrow m}$ deux sous-divisions nettes de I . Soit f une fonction continue de I à $\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \iint_{I_i} f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^m \iint_{J_k} f(x, y) dx dy.$$

Définition 6.1.6. Soit I un polyrectangle, et f une fonction continue de I à $\mathbb{R}$. Nous définissons l'intégrale de f sur I comme

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{I_i} f(x, y) dx dy,$$

où $\{I_i\}_{i:1 \rightarrow n}$ est une sous-division nette arbitraire de I .

Nous appelons mesure de I , ou aire de I , l'intégrale

$$m(I) = \iint_I dx dy$$

de la fonction constante $f(x, y) = 1$.

Il faudrait être évident que nous ne pouvons pas nous arrêter ici. La classe des ensembles sur lesquels nous pouvons intégrer une fonction n'est toujours pas suffisamment vaste : un disque n'est pas un polyrectangle, et un triangle non plus. Mais il est bien clair que nous pouvons *approcher* de tels ensembles avec des polyrectangles. La définition suivante est une version précise de cette idée.

Définition 6.1.7. On dit qu'un sous-ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^2$ est Jordan mesurable si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons trouver des polyrectangles A_n et B_n tels que, pour $m \leq n$,

$$A_m \subseteq A_n \subseteq C \subseteq B_n \subseteq B_m \quad \text{et} \quad m(B_n \setminus A_n) \leq \frac{1}{n}. \quad (6.1)$$

Nous appelons mesure de C (ou aire de C) le nombre

$$m(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n).$$

Nous disons que C est Jordan négligeable si $m(C) = 0$.

Remarque 6.1.8. 1. Observons que les limites ci-dessus existent, comme les suites $(m(A_n))$ et $(m(B_n))$ sont monotones et bornées. Les deux limites sont égales à cause de la propriété (6.1).
2. Le nombre $m(C)$ ne dépend pas du choix des A_n et B_n .

3. Les propriétés que $A_m \subseteq A_n$ ou $B_n \subseteq B_m$ ne sont pas vraiment nécessaires à exiger, comme, dans le cas qu'elles ne sont pas satisfaites, on peut toujours passer à des intersections ou unions appropriées des polyrectangles concernés pour faire valoir ces conditions.
4. Un ensemble Jordan mesurable est toujours borné.

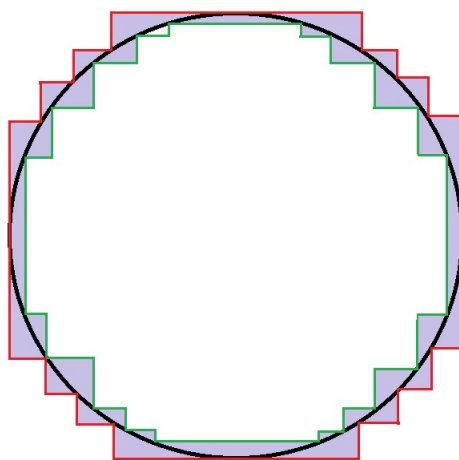


FIGURE 6.4 – Approximation d'un disque de l'intérieur et de l'extérieur avec des polyrectangles

Exemples 6.1.9. 1. Tout disque (fermé ou ouvert) est Jordan mesurable.

Si le disque a rayon r , sa mesure est donnée par la formule bien connue πr^2 .

2. Tout triangle plein (fermé ou ouvert) est Jordan mesurable.
3. Tout ensemble de la forme

$$\{(tx + (1-t)w, ty + (1-t)z) \mid x, y, w, z \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\},$$

donc tout segment qui relie deux points dans le plan, est Jordan négligeable. En particulier, le bord d'un triangle ou rectangle plein est négligeable.

4. Tout cercle (= bord d'un disque) est Jordan négligeable.

Proposition 6.1.10. *Soient C et D des sous-ensembles du plan qui sont Jordan mesurables.*

1. *On a que $C \cup D$, $C \cap D$ et $C \setminus D$ sont Jordan mesurables. En plus, si C est Jordan négligeable, $m(C \cup D) = m(D)$, et $m(C \cap D) = 0$.*
2. *Si $C \subseteq D$, on a que $m(C) \leq m(D)$.*
3. *Si $C \cap D = \emptyset$, ou plus généralement si $C \cap D = E$ avec E Jordan négligeable, on a que $m(C \cup D) = m(C) + m(D)$.*
4. *Si $C \subseteq A \subseteq D$, et C et D sont Jordan mesurables, avec $m(D \setminus C) = 0$, aussi A est Jordan mesurable, et alors $m(C) = m(A) = m(D)$.*

Maintenant, nous sommes prêts à donner la définition de l'intégrale qui va être, pour nous, la plus générale. Comme ci-dessus, elle doit être précédée par une proposition.

Proposition 6.1.11. *Soit C un ensemble qui est Jordan mesurable, et f une fonction réelle définie sur C . Supposons que f est continue et bornée. Choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un polyrectangle $I_n \subseteq C$ tel que $I_m \subseteq I_n$ pour $m \leq n$, et tel que la suite $(m(C \setminus I_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro.*

Alors la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{I_k} f(x, y) dx dy$$

existe, et cette limite ne dépend pas du choix des polyrectangles I_n .

Définition 6.1.12. *Supposons que les hypothèses de la dernière proposition sont satisfaites pour une fonction f . Alors on définit l'intégrale de f sur l'ensemble C comme*

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{I_k} f(x, y) dx dy.$$

La proposition suivante nous dit que nous avons seulement besoin des valeurs de f sur un ensemble qui ne diffère de son domaine que d'un ensemble qui est Jordan négligeable.

Proposition 6.1.13. *Soient $C \subseteq D$ des ensembles qui sont Jordan mesurables, et supposons que f est une fonction réelle définie sur D . Supposons que f est continue et bornée sur D . Alors si $m(D \setminus C) = 0$, on a que*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Avec cette proposition, nous pouvons donc étendre encore légèrement la définition de notre intégrale.

Définition 6.1.14. *Soient $C \subseteq D$ des ensembles qui sont Jordan mesurables, avec $m(D \setminus C) = 0$. Supposons que f est une fonction continue et bornée sur C . Alors nous disons que f est Jordan intégrable sur D , et nous définissons*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Nous finissons avec quelques propriétés élémentaires de l'intégrale de Jordan.

Proposition 6.1.15. *Soit C et D des sous-ensembles du plan qui sont Jordan mesurables, avec $C \cap D = \emptyset$ (ou, plus généralement, $C \cap D$ Jordan négligeable). Soit f une fonction continue et bornée sur $C \cup D$. Alors*

$$\iint_{C \cup D} f(x, y) dx dy = \iint_C f(x, y) dx dy + \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Proposition 6.1.16. *Soit C un sous-ensemble du plan qui est Jordan mesurable. Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues et bornées sur C , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\iint_C (f_1 + \lambda f_2)(x, y) dx dy = \iint_C f_1(x, y) dx dy + \lambda \iint_C f_2(x, y) dx dy.$$

6.2 Intégrales de fonctions positives

Dans cette section, nous montrons comment on peut aller plus loin encore si on ne travaille qu'avec des fonctions positives. On veut se débarrasser alors de deux conditions qui étaient nécessaires dans les discussions ci-dessus :

- Le fait que f doit être bornée.
- Le fait que l'ensemble C d'intégration doit être borné.

La possibilité d'enlever ces restrictions se base sur la proposition suivante.

Proposition 6.2.1. *Soit $C \subseteq D$ deux sous-ensembles du plan qui sont Jordan mesurables. Soit f une fonction continue, bornée et positive sur C , et g une fonction continue, bornée et positive sur D . Supposons que $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in C$. Alors*

$$\iint_C f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Définition 6.2.2. *Soit C un sous-ensemble du plan tel qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un sous-ensemble $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ qui est Jordan mesurable et avec $C_m \subseteq C_n$ pour $m \leq n$ et $C = \cup_{n=0}^{\infty} C_n$. Soit f une fonction continue, bornée et positive sur C . On définit*

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C_n} f(x, y) dx dy \in [0, +\infty].$$

Nous disons que f est intégrable sur C si cette limite existe dans $[0, +\infty)$.

Cette définition fonctionne comme la suite $(\iint_{C_n} f(x, y) dx dy)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est croissante par la proposition ci-dessus. On peut montrer qu'elle ne dépend pas du choix des C_n .

Maintenant, nous enlevons la condition que f doit être bornée.

Définition 6.2.3. *Soit C un sous-ensemble du plan qui est union dénombrable de sous-ensembles Jordan mesurables. Soit f une fonction continue et positive sur C . On met, pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$f_n : C \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \min\{f(x, y), n\}.$$

Alors chaque f_n est une fonction continue, bornée et positive avec $f_m(x, y) \leq f_n(x, y)$ si $(x, y) \in C$ et $m \leq n$.

On définit

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_C f_n(x, y) dx dy \in [0, +\infty].$$

Nous disons que f est intégrable sur C si cette limite existe dans $[0, +\infty)$.

De nouveau, c'est la Proposition 6.2.1 qui nous assure que cette limite est bien définie.

Remarque 6.2.4. On pourrait aussi appliquer ces limites dans l'ordre inverse, c'est-à-dire couper d'abord les fonctions, et alors laisser tendre l'ensemble C 'vers l'infini'. C'est la positivité de f qui nous garantit que ces deux routes nous mènent au même résultat. Comme vous pouvez soupçonner, on pourrait aussi définir $\iint_C f(x, y) dx dy$ pour f continue sur C mais pas forcément positive, si nous savons que $|f|$ est intégrable sur C .

6.3 Outil de calcul I : Domaines bornés par les graphes de fonctions

Proposition 6.3.1. Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues d'un intervalle $I = [a_1, a_2]$ à $\mathbb{R}$, telles que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pour $a_1 \leq x \leq a_2$. Soit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq a_2, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x < a_2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\},$$

et f une fonction continue et bornée sur U .

Alors C et U sont Jordan mesurables, $m(C \setminus U) = 0$, et

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Naturellement, on a une formule similaire si on utilise des fonctions dans la variable x .

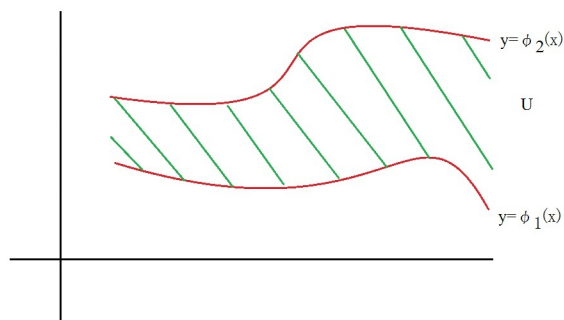


FIGURE 6.5 – Domaine borné par des graphes de fonctions

Exemples 6.3.2. 1. Soit

$$C = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

la moitié d'un disque. Alors cet ensemble est la région bornée par les fonctions $\varphi_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Soit

$$f : U = \{(x, y) \mid y > 0, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Alors f est continue et bornée sur U , et on peut aisément calculer alors que

$$\begin{aligned} \iint_C f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left([\sqrt{x^2 + y^2}]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

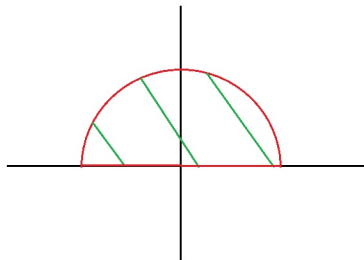


FIGURE 6.6 – Moitié d'un disque

2. Soit

$$C = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

un triangle plein. On a que cette région est bornée par les graphes des fonctions $\varphi_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x) = 1 - x$. Soit

$$f : C \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow xy.$$

Alors on a que

$$\begin{aligned} \iint_C f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dy dx \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

3. Considérons le sous-ensemble C du plan borné par les droites $y = x$,

$y = 2$ et le graphe de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$. Soit f la fonction

$$f : C \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \sin \frac{\pi x}{2y} dx dy.$$

Nous souhaitons calculer $\iint_C f(x, y) dx dy$.

Une première méthode serait de couper C en deux parties C_1 et C_2 par la ligne verticale $x = 2$. Alors on voit que

$$\begin{aligned} \iint_C f(x, y) dx dy &= \iint_{C_1} f(x, y) dx dy + \iint_{C_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Néanmoins, nous voyons que l'intégrale par rapport à y est difficile à calculer.

Observons maintenant que C peut aussi être réalisé comme la partie bornée par le graphe de deux fonctions *dans la variable y* , notamment les fonctions $y \rightarrow y$ et $y \rightarrow y^2$, avec domaine $y \in [1, 2]$. Donc

$$\begin{aligned} \iint_C f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \int_y^{y^2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dx \right) dy \\ &= \int_1^2 \left[-\frac{2y}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \right]_y^{y^2} dy \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) dy \\ &\stackrel{IPP}{=} -\frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{2}{\pi} y \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) \right]_1^2 - \frac{2}{\pi} \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) dy \right) \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \left(-1 - \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) \right]_1^2 \right) \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \left(-1 - \frac{2}{\pi} \right) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right). \end{aligned}$$

6.4 Outil de calcul II : Changement de variables

Pour introduire la formule pour le changement de variables, on aura besoin de quelques définitions.

Définition 6.4.1. *Un ensemble ouvert U dans le plan est un ensemble tel qu'autour de chaque point, on peut trouver un petit disque qui se trouve entièrement dans l'ensemble.*

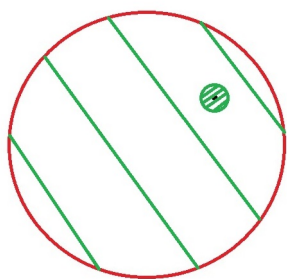


FIGURE 6.7 – Disque ouvert

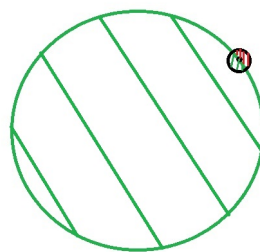


FIGURE 6.8 – Disque fermé

Exemple 6.4.2. Un disque ouvert (donc sans le bord) est un ensemble ouvert. Un disque fermé (donc avec le bord) n'est pas ouvert.

On aura besoin de la notion du *jacobien* d'une transformation du plan (ou d'une partie du plan).

Définition 6.4.3. *Soit U, V deux ensembles ouverts dans le plan, et soit $f : U \rightarrow V$ une fonction à dérivées partielles continues,*

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Pour tout $p = (x, y)$ dans U , le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ est appelé jacobien J_f de f (dans le point p).

On dit que f est un difféomorphisme de U à V si f est bijective avec $J_f(p) \neq 0$ pour tout p dans U .

On a donc que J_f est une application $U \rightarrow \mathbb{R}$. La valeur absolue $|J_f(p)|$ du jacobien $J_f(p)$ mesure l'élargissement relative d'une volume infinitésimale autour du point p . Si $J_f(p) = 0$, on dit que p est un *point singulier* de f : la fonction 'aplatit' la région autour de p .

Le signe de $J_f(p)$ mesure si f change l'orientation autour de p : par exemple si $J_f(p)$ est positive, l'image d'une courbe circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre autour de p va avoir comme image une courbe qui va encore dans le même sens.

Exemple 6.4.4. Soit f la transformation $(x, y) \mapsto (x + 2y, y)$. Comme c'est une fonction linéaire, le jacobien est constante, $J_f(x, y) = 2$ pour tout x, y . Des carrés avec des côtés de longueur r (et donc d'aire r^2) sont transformés en parallélogrammes d'aire $2r^2$. Pour des fonctions arbitraires, ce phénomène se produit 'infinitésimalement'.

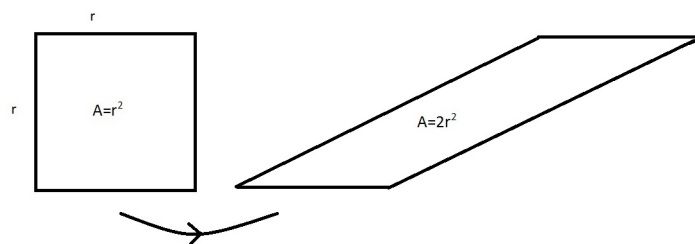


FIGURE 6.9 – Transformation $(x, y) \mapsto (x + 2y, y)$

Exemple 6.4.5. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, -2xy).$$

Alors on a $f_1(x, y) = x^2 - y^2$, et $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x$. La matrice totale des dérivées

partielles est

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de f est donné par $J_f(x, y) = -4(x^2 + y^2)$. On voit que f n'a que 0 pour point singulier, et que f élargit les régions de plus en plus si on s'éloigne de l'origine.

On peut maintenant formuler la formule de changement de variables pour les intégrales doubles.

Proposition 6.4.6. *Supposons que C_1 et C_2 sont deux sous-ensembles du plan qui sont Jordan mesurables, et supposons en plus que U_1 et U_2 sont deux ensembles ouverts tels que*

1. $U_i \subseteq C_i$,
2. $C_i \setminus U_i$ est Jordan négligeable, et
3. U_1 et U_2 sont difféomorphes par rapport à une fonction $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$.

Si alors f est une fonction continue et bornée sur U_2 , on a que

$$\iint_{C_2} f(u, v) du dv = \iint_{C_1} f(\Phi(x, y)) |J_\Phi(x, y)| dx dy,$$

où J_Φ est le jacobien de Φ .

- Remarque 6.4.7.**
1. Le fait que nous avons écrit u et v à gauche est seulement pour rendre la formule plus claire - on aurait aussi utiliser de nouveau x et y .
 2. On doit utiliser la valeur absolue du jacobien pour des raisons d'orientation.

Donnons aussi une version plus générale pour les fonctions positives.

Proposition 6.4.8. *Supposons que C_1 et C_2 sont des sous-ensembles du plan qui s'écrivent comme union de sous-ensembles Jordan mesurables $C_{1,n}$, respectivement $C_{2,n}$. Supposons en plus que $U_1 \subseteq C_1$ et $U_2 \subseteq C_2$ sont deux ensembles ouverts tels que*

1. $C_{i,n} \setminus U_i$ est Jordan négligeable pour tout $i \in \{1, 2\}$ et $n \in \mathbb{N}$, et
2. U_1 et U_2 sont difféomorphes par rapport à une fonction $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$.

Si alors f est une fonction continue et positive sur U_2 , on a que

$$\iint_{C_2} f(u, v) du dv = \iint_{C_1} f(\Phi(x, y)) |J_\Phi(x, y)| dx dy,$$

où J_Φ est le jacobien de Φ .

Exemples 6.4.9. 1. Considérons le changement en *variables polaires*, qui est très utile quand on veut évaluer des intégrales sur des (parties de) disques.

Soit $s > 0$ et

$$C_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq s\},$$

$$U_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < s\} \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}.$$

Considérons

$$\Phi : (0, s) \times (-\pi, \pi) \rightarrow U_s : (r, \theta) \rightarrow (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors ces données satisfont les conditions dans la Proposition 6.4.6. On calcule que

$$\begin{aligned} J_\Phi(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= r. \end{aligned}$$

Si donc f est une fonction continue et bornée définie sur U_s , on obtient que

$$\iint_{C_s} f(x, y) dx dy = \int_0^s \int_{-\pi}^{\pi} r f(r \cos(x), r \sin(x)) dr d\theta.$$

Considérons par exemple la fonction

$$f : C_s \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow e^{-x^2 - y^2}.$$

Le changement en variables polaires nous donne alors que

$$\begin{aligned}
 \iint_{C_s} f(x, y) dx dy &= \int_0^s \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-r^2} dr d\theta \\
 &= \pi \int_0^s e^{-r^2} dr^2 \\
 &= \pi \int_0^{s^2} e^{-t} dt \\
 &= -\pi [e^{-t}]_0^{s^2} \\
 &= \pi(1 - e^{-s^2}).
 \end{aligned}$$

Nous pouvons nous servir de ce calcul pour déterminer l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr$. En effet, si nous notons $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr$, une intégrale qui est évidemment convergente, nous voyons que

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_{-N}^N e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \iint_{C_s} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-s^2}) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Il suit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}.$$

2. Même si un domaine est borné par les graphes de deux fonctions, il peut être opportun de faire un changement de variables. Considérons par exemple le triangle plein C_2 borné par les axes de coordonnées et la droite $x + y = 1$, et soit U_2 son intérieur. Soit f la fonction

$$f : U_2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow e^{\frac{y-x}{y+x}}.$$

Alors il n'est pas clair comment intégrer

$$\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx.$$

Mais considérons le triangle plein C_1 qui est borné par les droites $v = u$, $v = -u$ et $u = 1$. Soit U_1 son intérieur. Alors on a que la transformation

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(u - v), \frac{1}{2}(u + v)\right)$$

donne un difféomorphisme entre U_1 et U_2 . Comme le jacobien de T est donné par la fonction constante

$$J_T(u, v) = 1/2,$$

nous voyons que

$$\begin{aligned} \iint_{C_2} f(x, y) dx dy &= \iint_{C_1} f\left(\frac{1}{2}(u - v), \frac{1}{2}(u + v)\right) \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{C_1} e^{\frac{v}{u}} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}} dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[u e^{\frac{v}{u}} \right]_{-u}^u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e - e^{-1}) u du \\ &= \frac{e - e^{-1}}{4}. \end{aligned}$$

Troisième partie

Intégrales curvilignes

Chapitre 7

Courbes paramétrées

7.1 Définition

Définition 7.1.1. Une courbe (paramétrée) est une application continue

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$.

On dit que γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

On dit que γ est un lacet si γ est fermée et en plus γ est injective sur $[a, b)$ (ce qui veut dire que γ est une courbe fermée qui n'a pas d'intersections avec soi-même).

Nous disons qu'une courbe est de classe C^1 si les fonctions γ_1 et γ_2 admettent une dérivée continue (par morceaux).

Remarque 7.1.2. On admet parfois aussi des intervalles ouverts, ou des intervalles non-bornés comme domaine.

Définition 7.1.3. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 . La vitesse (ou vecteur-vitesse) de γ est la fonction $v_\gamma = \gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$,

$$v_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)).$$

La vitesse (ou vitesse absolue) de γ est la norme euclidienne de la vitesse,

$$\|v_\gamma\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \rightarrow \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2}.$$

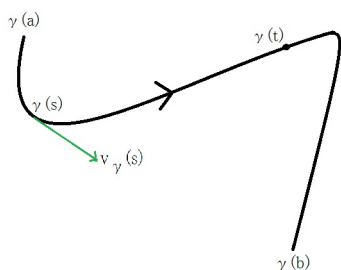


FIGURE 7.1 – Une courbe

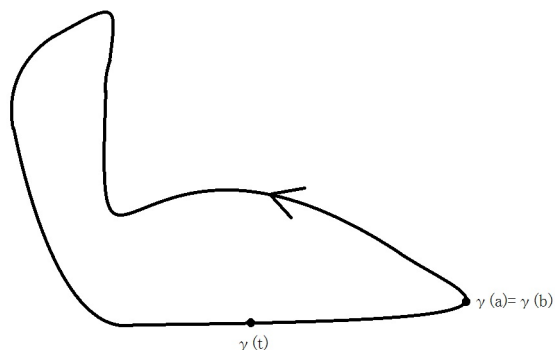


FIGURE 7.2 – Une courbe fermée

Remarque 7.1.4. Plus précisément, la vitesse d'une courbe γ dans un point t doit être considérée comme un *vecteur* dans le plan avec point d'application le point $\gamma(t)$, et la direction $v_\gamma(t) = \gamma'(t)$.

7.2 Paramétrage de courbes classiques

Nous donnons des paramétrages pour quelques figures bien connues.

7.2.1 Segments

Soit $p = (x, y)$ et $q = (w, z)$ deux points dans le plan. Nous voulons paramétrer le segment droit qui unit ces deux points. Nous posons

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)(x, y) + t(w, z) = ((1-t)x + tw, (1-t)y + tz).$$

Alors $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. La vitesse de γ est le vecteur avec direction

$$v_\gamma(t) = (w - x, z - y) = \vec{pq}.$$

La vitesse absolue $\|v_\gamma\|$ de γ est donc constamment

$$D = \|\vec{pq}\| = \|p - q\| = \sqrt{(w - x)^2 + (z - y)^2},$$

la distance entre p et q .

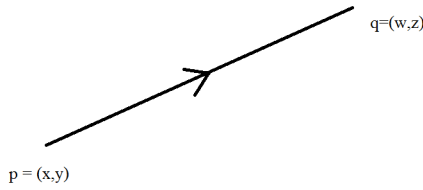


FIGURE 7.3 – Segment de p à q

7.2.2 Ellipses

Considérons l'ellipse donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $a, b \in \mathbb{R}_0^+$. Nous pouvons la paramétrer par

$$\gamma : [0, 2\pi] : t \rightarrow (a \cos(t), b \sin(t)).$$

La vitesse est donnée par

$$v_\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

La vitesse absolue devient $\|v_\gamma\|(t) = \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 \cos(t)^2}$. En particulier, dans le cas d'un cercle, donc si $a = b$, nous voyons que la vitesse absolue est constamment a .

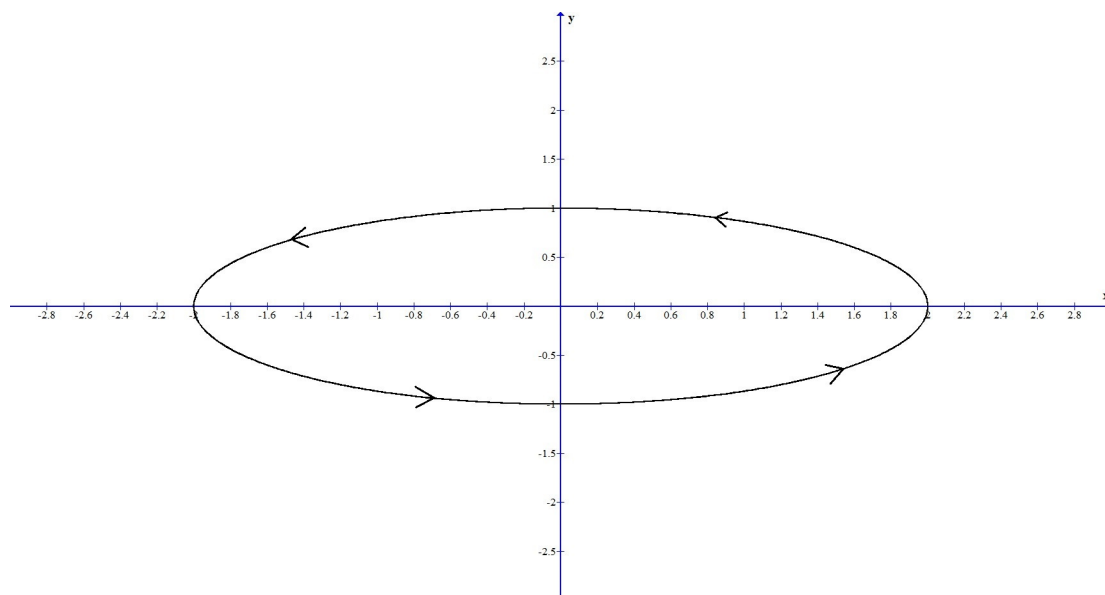


FIGURE 7.4 – Ellipse

7.2.3 Paraboles

La parabole

$$y = ax^2$$

avec $a > 0$ peut se paramétrer avec la courbe

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, at^2).$$

Nous voyons que

$$v_\gamma(t) = (1, 2at), \quad \|v_\gamma(t)\| = \sqrt{1 + 4a^2t^2}.$$

7.2.4 Hyperboles

La branche supérieure de l'hyperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, où $a, b > 0$, se paramètre par la courbe

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

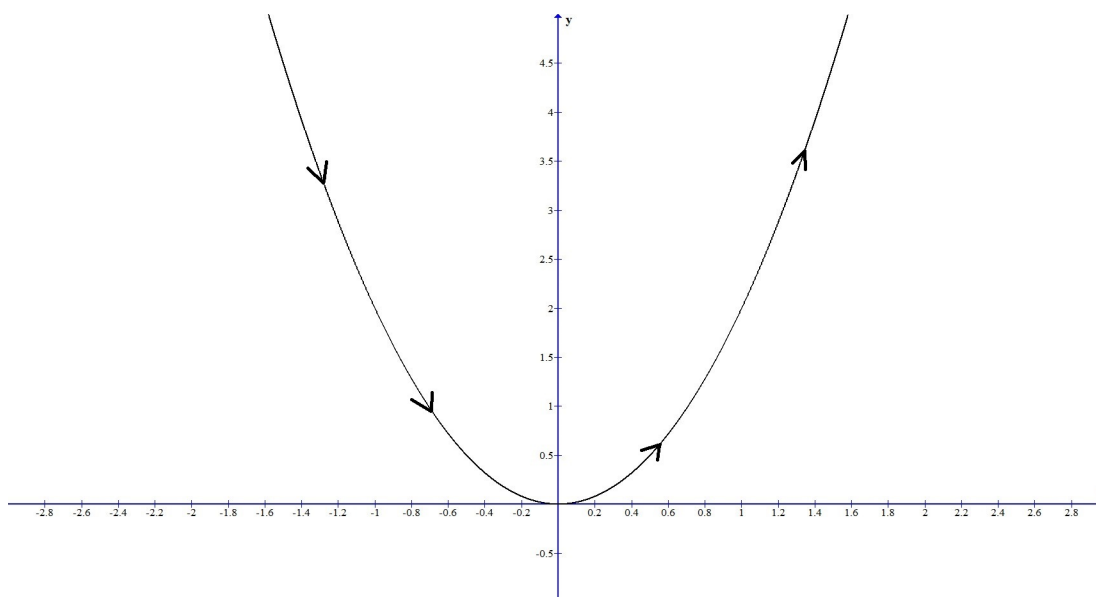


FIGURE 7.5 – Parabole

La vitesse est donnée par le vecteur

$$v_{\gamma}(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)),$$

et la vitesse absolue par

$$\|v_{\gamma}\|(t) = \sqrt{a^2 \cosh(t)^2 + b^2 \sinh(t)^2}.$$

Un autre paramétrage pour la branche supérieure de cette hyperbole est donnée par

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(t, \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 + t^2} \right).$$

En effet, nous avons que $\gamma(t) = \lambda(\phi(t))$ où $\phi(t) = a \sinh(t)$. Pour le paramétrage λ , la vélocité est donnée par

$$v_{\lambda}(t) = \left(1, \frac{bt}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right).$$

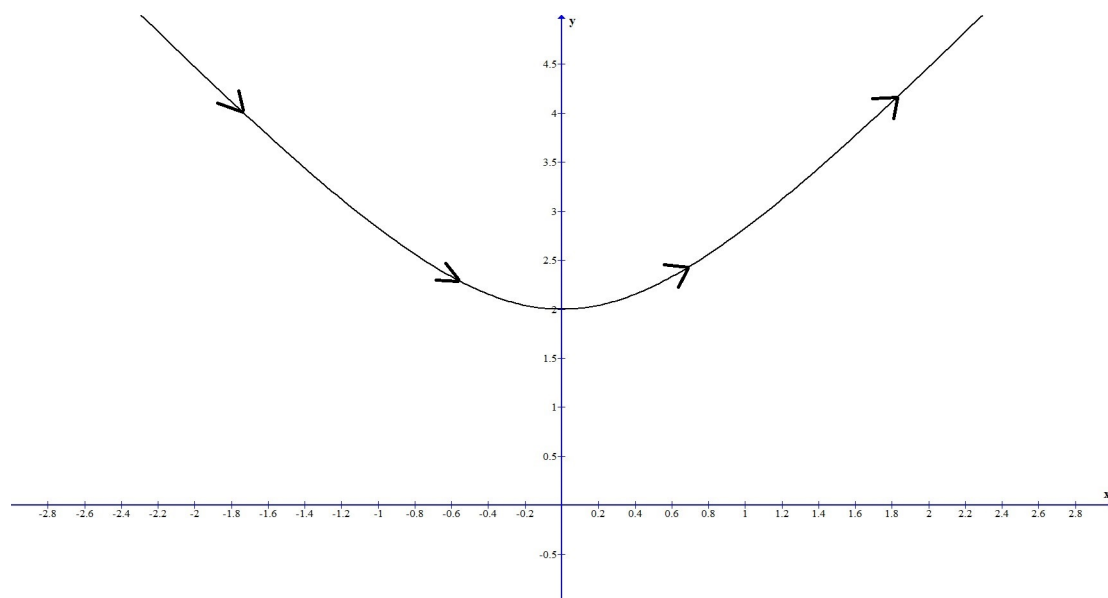


FIGURE 7.6 – Hyperbole

Chapitre 8

Formule de Green-Riemann

8.1 Travail d'une force le long d'un chemin

Supposons que F est un *champ de vecteurs* dans un sous-ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Cela veut dire qu'à tout point $(x, y) \in U$, nous avons associée un autre couple

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2,$$

ce que nous interprétons comme la direction d'un vecteur avec point d'application (x, y) . Nous disons que le champ de vecteurs est continu si cela vaut pour la fonction F .

Nous voulons maintenant *intégrer un tel champ de vecteurs le long d'une courbe*. Présentons d'abord l'idée derrière ce concept. Si γ est une courbe avec image dans U , nous pouvons y associer un champ de vecteurs sur l'image de γ , en mettant dans $\gamma(t)$ le vecteur de vitesse $v_\gamma(t)$. Mais nous avons aussi le vecteur donné $F(\gamma(t))$ dans ce point. Alors, si nous avons un couple de vecteurs v et w , nous pouvons y associer un nombre, leur *produit scalaire*,

$$v \cdot w = \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \|v\| \|w\| \cos(\theta),$$

où θ est l'angle entre v et w . Donc, étant donné notre courbe γ et notre champ de vecteurs F , nous pouvons en associer la fonction réelle

$$w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \langle v_\gamma(t), F(\gamma(t)) \rangle.$$

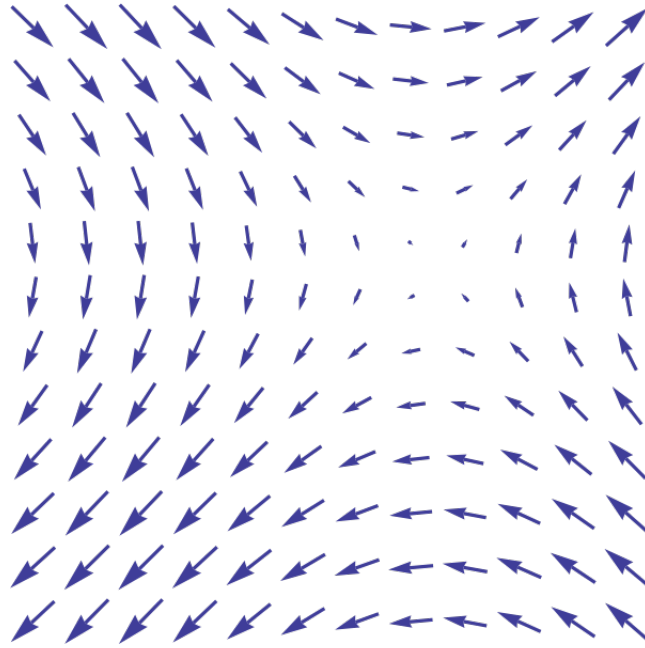


FIGURE 8.1 – Champs de vecteurs

Comme w est simplement une fonction sur un intervalle avec valeurs réels, c'est clair que nous pouvons en prendre l'intégrale. Ce raisonnement nous mène à la définition suivante.

Définition 8.1.1. Soit F un champ de vecteurs continu dans un ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit f une courbe de classe C^1 (par morceaux) dans U ,

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U.$$

Nous appelons travail de F le long de γ , ou intégrale curviligne de F le long de γ , le nombre

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_2(\gamma(t))\gamma'_2(t)) dt. \end{aligned}$$

8.2 Propriétés algébriques

Nous commençons par une propriété qui montre que le paramétrage concret d'une courbe n'est pas essentielle pour les intégrales curvilignes.

Proposition 8.2.1. *Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes de classe C^1 telles que*

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\phi(t))$$

pour une fonction bijective

$$\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

avec dérivée continue telle que $\phi'(t) > 0$ pour tout $t \in [c, d]$. Alors pour tout champ de vecteurs F avec dérivées partielles continues qui est définie sur un ensemble ouvert qui contient l'image des courbes γ_1 et γ_2 , on a que

$$\int_{\gamma_1} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Par contre, si nous choisissons ϕ tel que $\phi'(x) < 0$ pour tout x , on doit ajouter un signe. Formulons un cas spécial qui est très utile.

Proposition 8.2.2. *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 . Soit $\gamma^\circ : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe*

$$\gamma^\circ : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow \gamma(-t),$$

ce qui est un paramétrage de l'image de γ mais dans le sens opposé. Alors pour tout champ de vecteurs F avec dérivées partielles continues qui est définie sur un ensemble ouvert qui contient l'image de la courbe γ , on a que

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma^\circ} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Nous avons aussi une propriété d'addition par rapport à la composition de deux courbes.

Proposition 8.2.3. Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes de classe C^1 par morceaux telles que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Soit γ leur composition dans le sens que

$$\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

Alors pour tout champ de vecteurs F avec dérivées partielles continues qui est définie sur un ensemble ouvert qui contient l'image de la courbe γ , on a que

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Passons maintenant à la dépendance d'une intégrale curviligne sur l'image d'une courbe. En général, l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs dépend essentiellement de la courbe sur laquelle nous intégrons, et pas seulement du début et la fin de la courbe.

Exemple 8.2.4. Soit $F(x, y) = (0, x)$, et considérons les deux courbes

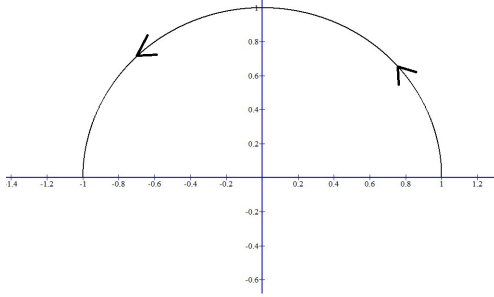
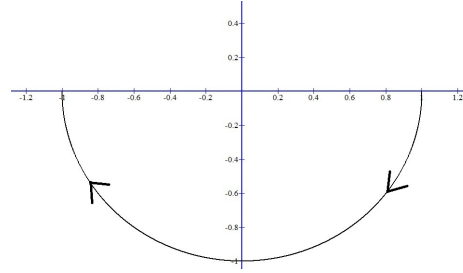
$$\gamma_{\pm} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \pm \sin(t)),$$

qui vont de $(1, 0)$ à $(-1, 0)$ en passant respectivement par la partie en haut et la partie en bas du cercle d'unité. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\pm}} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi} 0 \cdot (-\sin(t)) + \cos(t)(\pm \cos(t)) dt \\ &= \pm \int_0^{\pi} \cos(t)^2 dt \\ &= \pm \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1) dt \\ &= \pm \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui dépend donc du choix de γ_+ ou γ_- .

Pourtant, il y a une classe importante de champs de vecteurs pour lesquels la courbe n'est pas essentielle.

FIGURE 8.2 – La courbe γ_+ FIGURE 8.3 – La courbe γ_-

Définition 8.2.5. On appelle un champ de vecteurs F sur un ouvert U exact¹ s'il existe une fonction $Z : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec dérivées partielles continues telle que le gradient de Z est F , donc telle que

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y} \right).$$

On appelle alors Z une fonction primitive (ou fonction potentielle, ou simplement potentiel) pour F .

Proposition 8.2.6. Soit F un champ de vecteurs exact sur un ouvert U , avec fonction primitive Z . Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe de classe C^1 dans U . Alors

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = Z(\gamma(b)) - Z(\gamma(a)).$$

En particulier, l'intégration ne dépend que des points extrêmes de la courbe γ .

On peut aisément démontrer cette proposition :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial Z}{\partial y}(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b (Z \circ \gamma)'(t) dt \\ &= Z(\gamma(b)) - Z(\gamma(a)), \end{aligned}$$

1. En vérité, on n'utilise pas ce terme pour les champs de vecteurs, mais plutôt pour les 'formes différentielles' (desquelles je n'introduis pas la définition). Pourtant, à tout champ de vecteurs dans le plan, il correspond une forme différentielle, et j'appelle ici un champ de vecteurs exact quand la forme différentielle associée est exacte.

où nous avons utilisé la règle de chaîne pour les fonctions multi-variables.

Une propriété qui est très proche de l'exactitude est celle d'être *un champ de vecteurs fermé*.

Définition 8.2.7. Soit F un champ de vecteurs avec dérivées partielles continues sur un ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Nous disons que F est fermé² si

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Nous voyons que cette condition est *locale* : on peut la vérifier dans chaque voisinage d'un point de U . Par contre, l'exactitude est une condition *globale* : nous voulons *une seule fonction* Z , définie sur le tout de U , telle que le gradient de Z est égal à F . Cela explique un peu pourquoi, dans la proposition suivante, la forme de l'ensemble U est importante pour pouvoir relier les deux conditions.

Proposition 8.2.8. Soit F un champ de vecteurs avec dérivées partielles continues défini sur un ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. Si F est exact, alors F est fermé.
2. Si F est fermé et U est un ouvert convexe³, alors F est exact.

Exemple 8.2.9. Considérons l'ensemble

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

le plan sans l'origine. Alors U n'est pas convexe. Soit

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

2. De nouveau, cette définition est plutôt utilisée pour la forme différentielle associée. Remarquons aussi que dans un contexte physique, où on interprète F comme une force, on dit que ' F est une force conservative' précisément quand F est un champ de vecteurs fermé.

3. On dit qu'un ensemble est convexe si avec chaque couple de points qui se trouvent dans l'ensemble, aussi le segment qui joint les deux points se trouvent dans l'ensemble. Par exemple l'intérieur d'une ellipse est convexe.

ce qui est un champ de vecteurs bien défini sur U . On vérifie que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

donc F est fermé. Mais F n'est pas exact sur U : on voudrait prendre

$$Z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

comme fonction primitive, mais ce n'est pas possible de définir cette fonction de manière dérivable (ou même continue) sur le tout de U .

En fait, on peut démontrer que F n'est pas exact en démontrant que la Proposition 8.2.6 ne vaut pas dans ce cas. En effet, considérons de nouveau les deux courbes

$$\gamma_{\pm} : [0, \pi] \rightarrow U, \quad t \mapsto (\cos(t), \pm \sin(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\pm}} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi} (\pm \sin(t)^2 \pm \cos(t)^2) dt \\ &= \pm \pi. \end{aligned}$$

Les deux intégrales ne sont pas égales.

Le champ de vecteurs F ci-dessus peut être utilisé pour définir un nombre entier associée à une courbe fermée γ de classe C^1 qui évite le point $(0, 0)$.

Proposition 8.2.10. *Soit γ une courbe fermée de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, telle que $\gamma(t) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in [a, b]$. Soit F le champ de vecteurs défini sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par*

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Alors le nombre

$$n_{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2} dt$$

est un nombre entier.

Définition 8.2.11. Soient γ et F comme dans la proposition ci-dessus. Nous appelons le nombre n_γ l'indice de γ par rapport à $(0, 0)$.

Intuitivement, n_γ mesure combien de temps γ tourne autour du point $(0, 0)$. Le signe de n_γ détermine si on tourne dans ou contre le sens des aiguilles d'une montre. Par exemple, pour

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t)),$$

un cercle autour de $(0, 0)$ contre le sens des aiguilles d'une montre, l'indice n_γ est égale à 1.

Naturellement, on peut aussi définir l'indice d'une courbe par rapport à un autre point que $(0, 0)$ (en supposant que la courbe ne passe pas par ce point). L'indice par rapport à un point (x, y) sera noté $n_\gamma(x, y)$.

8.3 Formule de Green-Riemann

Pour calculer l'intégrale d'un champ de vecteurs le long d'une courbe, nous n'avons besoin que des valeurs du champ F sur l'image de la courbe. Maintenant, nous allons voir une formule qui nous permet de calculer une telle intégrale en utilisant les valeurs de F dans des autres points.

Intuitivement, c'est clair qu'un lacet (c'est-à-dire une courbe fermée sans intersections avec soi-même) divise le plan en deux parties, une partie intérieure et bornée U_γ et une partie extérieure V_γ . Nous noterons l'union $U_\gamma \cup \gamma([a, b])$, ce qu'est en fait l'adhérence de U_γ , comme Ω_γ . On a donc que Ω_γ contient l'image de la courbe paramétrée γ , ainsi que tous les points du domaine borné par cette image.

Lemma 8.3.1. Soit γ un lacet de classe C^1 , pour lequel la vitesse v_γ ne s'annule jamais. Alors Ω_γ est Jordan mesurable.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème de Green-Riemann⁴.

4. Ce théorème n'est qu'un cas très spécial d'un théorème beaucoup plus général, connu comme 'théorème (ou formule) de Stokes'.

Théorème 8.3.2 (Théorème de Green-Riemann). *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un lacet de classe C^1 , pour laquelle l'indice $n_\gamma(x, y)$ est 1 pour un point (et alors tout point) dans l'intérieur de Ω_γ . Soit F un champ de vecteurs avec dérivées partielles continues sur un domaine ouvert qui contient Ω_γ ainsi que l'image de γ . Alors*

$$\int_\gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Omega_\gamma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Exemple 8.3.3. Soit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t)).$$

Alors Ω_γ est le disque

$$\Omega_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Considérons maintenant le champ de vecteurs

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow (-y, x).$$

Alors

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x, y) = 2.$$

Donc

$$\iint_{\Omega_\gamma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x, y) dx dy = 2 \iint_{\Omega_\gamma} dx dy = 2\pi,$$

ce qui nous donne le terme à droit dans le théorème de Green-Riemann.

Le terme à gauche de ce théorème se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (F_1(\cos(t), \sin(t))(-\sin(t)) + F_2(\cos(t), \sin(t))(\cos(t))) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

En effet, les deux termes s'accordent pour cet exemple particulier.

Remarque 8.3.4. En fait, ce théorème est encore vrai si on admet des lacets qui sont avec dérivée continue par morceaux. Ainsi, on peut aisément vérifier le cas spécial d'une intégrale de contour sur un rectangle $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Ci-dessous, nous donnons les détails. On peut alors démontrer le cas général en rapprochant le domaine donné avec des polyrectangles, et de montrer la formule de Green-Riemann pour les polyrectangles en utilisant la propriété d'additivité pour les intégrales doubles, et le fait que les intégrales curvili-néaires sur des courbes γ et γ^o de direction opposée s'annulent.

On a que le bord d'un rectangle $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ se décompose en quatre segments, qu'on peut paramétrer comme suit :

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [a_1, a_2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t, b_1), \\ \gamma_2 : [b_1, b_2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a_2, t), \\ \gamma_3 : [a_1, a_2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a_1, a_2 - t), \\ \gamma_4 : [b_1, b_2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (b_1, b_2 - t).\end{aligned}$$

Pour γ_3 et γ_4 , il faut prendre les paramétrages tels qu'on voyage à gauche, respectivement en bas - on a alors que la composition γ de tous les segments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 forme une courbe avec dérivée continue par morceaux autour de l'intérieur du rectangle $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.

Soit maintenant F un champ de vecteurs avec dérivées partielles continues défini sur le rectangle $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Alors on a que

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

On calcule que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{a_2} (F(t, b_1) \cdot \gamma_1'(t)) dt \\ &= \int_{a_1}^{a_2} F(t, b_1) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_1) dt.\end{aligned}$$

En continuant de cette façon, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_1) dt + \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_2, t) dt \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} F_1(a_1 + a_2 - t, b_2) dt \\ &\quad - \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_1, b_1 + b_2 - t) dt. \end{aligned}$$

Par un changement de variable pour les deux derniers termes, on peut écrire cette expression dans la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_1) dt + \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_2, t) dt \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_2) dt - \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_1, t) dt. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le terme à droite dans l'égalité de Green-Riemann. On a que

$$\begin{aligned} &\iint_{[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (x, y) dx dy \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (x, y) dy dx \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial F_2}{\partial x} (x, y) dx dy - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial F_1}{\partial y} (x, y) dy dx \\ &= \int_{b_1}^{b_2} [F_2(x, y)]_{x=a_1}^{x=a_2} dy - \int_{a_1}^{a_2} [F_1(x, y)]_{y=b_1}^{y=b_2} dx \\ &= \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_2, y) dy - \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_1, y) dy - \int_{a_1}^{a_2} F_1(x, b_2) dx + \int_{a_1}^{a_2} F_1(x, b_1) dx. \end{aligned}$$

Naturellement, comme nous faisons l'intégration sur les variables x et y , nous pouvons les remplacer par n'importe quel autre symbole, et nous arrivons

donc à

$$\begin{aligned} \iint_{[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (x, y) dx dy &= \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_2, t) dt - \int_{b_1}^{b_2} F_2(a_1, t) dt \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_2) dt + \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, b_1) dt, \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'expression d'auparavant.

Exercice : Démontrer le théorème de Green-Riemann pour le cas où γ est décrit le cercle d'unité. (Suggestion : utilisez un changement en variables polaires.)