Solutions TDs

TD1

Exo1 : a),b),c) divergente vers $+\infty$, d) Convergente (vers 2^{-101}), e) Convergente (vers $\frac{\pi^2}{6}$), f) Divergente.
Exo2 : 1) u_N, 2) $\lim_{N\to\infty} u_N$, 3) a) 1,b) divergente, c) 1/10, d) 3/4
Exo3 : a) divergente, b) convergente, c) convergente, d) inconclusif
Exo4 : a),b),f) : Divergente, c),d),e) : Convergente
Exo5 : 2) Utiliser que $G_{n+1} = \frac{1}{G_n} + 1$
Exo6 : Convergente : a) 1/2, b), e), f), g), h), i), j) 1/e, k), l), m), o) 1/2, p) 4, q) , r)1/4. Les autres : divergentes.
Exo7 : 2) Comparaison avec $1/n^2$.

TD2

Exo1 : 2) $\frac{1}{(1-X)^2}$, 4) $\frac{X+X^2}{(1-X)^3}$.
Exo2 : $S(X) = (X+1)\ln(X+1) - X$.
Exo3 : a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n X^n$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{b^{n+1}}X^n$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n\right)X^n$, d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^{2n}$, e) $1 - X + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(n^2-n-1)X^n$, f) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ avec $a_n = 1$ pour n pair et $a_n = 3$ pour n impair, g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}X^{2n+1}$, h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}X^{2n+2}$, i) $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}X^{2n+1}$, j) $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}X^n$, k) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}X^k$ où $a_0 = 1$ et $a_{k+1} = (-k+\frac{1}{2})a_k$, l) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k!}\frac{X^{2k+1}}{2k+1}$ où $b_0 = 1$ et $b_{k+1} = (-k-\frac{1}{2})b_k$
Exo4 1) $f(X) = a_0 e^{cX}$ avec a_0 une constante, 2) $f(X) = a_0\cosh(\sqrt{c}X) + a_1\sinh(\sqrt{c}X)$ pour $c > 0$, $a_0 + a_1 X$ pour $c = 0$, $a_0\cos(\sqrt{-c}X) + a_1\sin(\sqrt{-c}X)$ pour $c < 0$. Ici, a_0 et a_1 constantes. 3) Si $c = 0$, $f(X) = a_0 + a_1 X$. Si c de la forme $n(n-1)$ pour un $n \in \mathbb{N}$: $f(X) = a_n X^n$. Dans les autres cas : $f(X) = 0$.
Exo5 : a) 2, b) ∞, c) 1/4, d) 0 si $|a| > 1$, 1 si $|a| = 1$, ∞ si $|a| < \infty$, e) $R = 1$ si $a \neq 0$, $R = \infty$ si $a = 0$, f) $R = 1$.
Exo6 : 1) $f(X) = \frac{1}{1+X+X^2} = \sum_{k=0}^{\infty} X^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} X^{3k+1}$, 2) $f(X) = X^2\arctan(X) = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}X^{2k+1}$, 3) $f(X) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k-1}(k-1)!}{(2k)!}X^{2k}$.

TD3

Exo1 : 1) $T = 2\pi$ (prendre deux fois la dérivée et des combinaisons linéaires pour conclure que la période est à la fois une multiple entière de $2\pi/3$ et $2\pi/5$), 2) $T = \pi$.
Exo3 : Si on écrit $f'(x) = c' + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k\cos(\frac{2k\pi}{T}x) + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x)$, on a $c' = 0$, $a'_k = \frac{2k\pi}{T}b_k$, $b'_k = \frac{-2k\pi}{T}a_k$.
Exo4 : Les $b_k = 0$ comme f paire. $c = \frac{2}{\pi}$ et $a_n = \frac{-4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$. Donc $|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$. En prenant $x = \pi/4$, et en utilisant que $\cos(n\pi/2) = 0$ pour n impaire et $\cos(k\pi) = (-1)^k$, on trouve $\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{16m^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. En réécrivant, on trouve la solution donnée.
Exo5 : Fonction paire donc $b_n = 0$. $c = 1$ et $a_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$. Donc $x\sin(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$. En prenant $x = \pi/2$ et en réécrivant, on trouve la solution.
Exo6 : $c = \sinh(\pi)/\pi$, $a_n = \frac{2(-1)^n\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}n\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}$. Donc

$$e^x = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(nx) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin(nx)\right).$$

Pour $x = \pi$: $\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1})$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+1} = \pi\coth(\pi)$.

Exo7 Fonction paire donc $b_n = 0$. $c = 1$, $a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2 r^2}(1-\cos(2\pi n r))$, ce qui converge vers 2 si $r \to 0$.

TD4

Exo1 : a) singularité à l'infini, comportement $\sim 1/t^2$ donc intégrale convergente, b) $t^2+2t-24 = (t+6)(t-4)$, singularité de type $1/(t-4)$ autour de 4 donc intégrale pas convergente, c) $\tan(x)/x = \sin(x)/x\cos(x)$ continue en 0, pas d'autre singularité, donc convergente, d) $(x^2-3x+2)(x^2+x-6) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$, pas de singularité dans l'intervalle d'intégration, comportement $\sim 1/x^2$ à l'infini, donc convergente, e) comportement $\sim 1/t$ autour de 0, donc pas convergente, f) $e^{-t}/t \leq e^{-t}$ et e^{-t} intégrable à l'infini, donc convergente, g) cf. d), singularité de type $1/x^2$ autour de 2, pas convergente, h) $\exp(-\ln(t)^2) = t^{-\ln(t)} < 1/t^2$ pour t grand, donc convergente, i) L'intégrand est en fait continue en 0, faut donc seulement regarder le comportement à l'infini. Mais $\int_1^M \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{IPP}{=} [-\cos(t)/t]_1^M - \int_1^M \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, et en prenant $M \to \infty$, on voit que la première partie tend vers une constante et al deuxième partie donne une intégrale convergente comme $\cos(t)/t^2 = O(1/t^2)$ à l'infini.

Exo2 : a) décomposition en éléments simples et regarder $\int_0^M$, alors laisser $M \to \infty$: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)(t+1)} = \ln(2)$, b) $2\pi/3\sqrt{3}$, c) (cf. a)) π, d) (cf. a)) π, e) 2 (substitution $s = \sqrt{t}$), f) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ (substitution $y = \sqrt{1+e^x}$)

Exo3 : a) divergente, b) divergente, c) convergente (IPP), d) divergente (fonction $\geq \cos(1) > 0$)

TD5

Exo1 : a) 11/12, b) $\pi/4 + \ln(2)/2$, c) $\pi/4 + \ln(2)/2$, d) $\ln(2)$,
Exo2 : 1) $\int_0^1 \ln(x)x^n\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$,
Exo3 : 1) $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi^2/2$, 2) $\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1/(1-x^2)}{1+y} + \frac{x^2/(x^2-1)}{1+x^2y}$.

TD6

Exo1 : a) 3/70, b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, c) 1/24, d) 1/3, e) $\frac{\pi}{4}$, f) -8/45, g) $\sin(2)+2$
Exo2 : a) $\frac{\pi e - 1}{2e}$, b) $\pi\ln(2)$, c) $\frac{15}{32}\ln(2)$, d) $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$, e) 3/70, f) 2/15.
Exo3 : $p < 1$.

TD7

Exo1 : a) 1/3, b) 0, c) 0, d) 2π, e) -2π, f) 2/3, g) 0, h) 0, i) -3/70
Exo3 : a) $-\pi$, b) 0, c) 3/70, d) 2π, e) 0