TD n°1
Séries numériques

Exercice 1 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Si possible, déterminer la valeur de la série quand elle est convergente.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$ *c)* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$
d) $\sum_{n=100}^{\infty} 2^{-n}$ *e)* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\ln(n)}$ *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On construit une nouvelle suite $(v_n)_{n\geq 0}$ où

$$\begin{cases} v_0 &= u_0 \\ v_n &= u_n - u_{n-1} \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On appelle la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une *série télescopique.*

1) Calculer la N-ième somme partielle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
2) Montrer que la *série* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge si et seulement si la *suite* (u_n) converge. Calculer alors la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ quand la série est convergente.
(3) Déterminer la convergence ou divergence des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}), \quad c)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Exercice 3 En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Est-ce que nous pouvons utiliser le critère de d'Alembert pour dire quelque chose sur la convergence ou divergence de la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}?$$

Exercice 4 En utilisant le critère de comparaison, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ *c)* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k+k^2}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n-1}}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

Exercice 5 Considérons la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0} = (1,1,2,3,5,8,\ldots)$ où donc

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

Nous voulons montrer que la série des réciproques $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ est convergente. On donne deux arguments différents.

1. Montrer par récurrence que $F_n \geq \frac{n^2}{5}$. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ est convergente.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} G_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$
où $G_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. (On admet que cette limite existe.) En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ est convergente.

Exercice 6 Déterminer la convergence ou divergence des séries suivantes, et calculer la valeur de la série si possible.[1]

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	*b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^3}$	*c)* $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sin^2(n)}$	*e)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-1}$	*f)* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$	*h)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^4}$	*i)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$
j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	*k)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$	*l)* $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos(\frac{1}{n}))$
m) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	*n)* $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)$	*o)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$
p) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}$	*q)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2+3+...+n}{1^3+2^3+3^3+...+n^3}$	*r)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$

Exercice 7 Si (a_n) est une suite de nombres positifs telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente
- en utilisant que $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ pour x, y des nombres,
- en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 8 Montrerons que l'exercise 2 peut aussi être intéressant dans le sens inverse. Mettons
$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}).$$

1. À partir de la règle de l'Hôpital, montrer que
$$\lim n^2 v_n = -\frac{1}{12}.$$
(Mettez d'abord $n^2 v_n$ dans la bonne forme !)
2. Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ converge.
3. En déduire que (u_n) est une *suite* convergente.

1. On aura besoin de l'identité $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ (a nombre réel donné) à un instant donné. Est-ce que vous réussissez à démontrer cette limite ? (Suggestion : essayez de réécrire l'expression tel qu'on peut utiliser la règle de l'Hôpital.)