

TD n°2
Séries entières

Exercice 1 On considère la série entière formelle $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)X^n$.

1. Vérifier que pour tout entier n et tout réel a on a
$$(n+1)a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot a^{n-k}.$$
2. En déduire une expression explicite pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)X^n$. (Suggestion : produit de Cauchy !)
3. Donner une autre démonstration en utilisant la dérivée de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$.
4. Modifier la méthode précédente pour déterminer aussi $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 X^n$.

Exercice 2 On considère la série entière formelle
$$S(X) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} X^n.$$

1. Calculer $S'(X)$ et $S''(X)$.
2. Montrer que $S''(X) = \dfrac{1}{1+X}$, et en déduire une expression pour $S(X)$.

Exercice 3 Développer en série entière formelle. Dans b), on a $a, b \neq 0$. Suggestion pour g) : dériver ! Dans k) ainsi que dans l), il suffit de donner une formule de récursion pour les coefficients.

$a)\ \frac{1}{2X+1}$	$b)\ \frac{1}{aX+b}$	$c)\ \frac{1}{X^2-X-1}$
$d)\ \frac{1}{X^2+1}$	$e)\ (X^2+1)e^{-X}$	$f)\ \frac{3X+1}{1-X^2}$
$g)\ \arctan(X)$	$h)\ \ln(1+X^2)$	$i)\ \ln\left(\frac{1-X}{1+X}\right)$
$j)\ e^X \cosh(X)$	$k)\ \sqrt{1+X}$	$l)\ \ln(X+\sqrt{1+X^2})$

Exercice 4

1. Déterminer les séries entières formelles qui sont solution de l'équation différentielle $f'(x) = cf(x)$ où c est un nombre réel. Exprimer la réponse en terme de fonctions connues.
2. Même question pour l'équation différentielle $f''(x) = cf(x)$. (Distinguer les cas $c > 0$, $c = 0$ et $c < 0$.)
3. Même question pour l'équation différentielle $x^2 f''(x) = cf(x)$.

Exercice 5 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes. Dans d) et e), le a est un réel arbitraire.

$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$	$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$	$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$
$d)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a^{(n^2)} x^n$	$e)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^{(n^2)}$	$f)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) x^n.$

Exercice 6 Déterminer les séries entières formelles des fonctions suivantes à partir des équations différentielles qu'elles satisfont. Déterminer explicitement les premiers termes. Déterminer après le rayon de convergence.

1. La fonction f telle que $(1 + x + x^2)f'(x) + (2x + 1)f(x) = 0$ avec $f(0) = 1$.
2. La fonction f telle que $x(1 + x^2)f'(x) - 2(1 + x^2)f(x) - x^3 = 0$ avec $f''(0) = 0$.
3. La fonction $f(x) = (\arcsin(x))^2$ (Calculer les deux premières dérivées et déterminer une équation différentielle).