TD n°3
Séries de Fourier

Exercice 1 Calculer la période minimale, et les coefficients de Fourier par rapport à cette période, des fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos(3x) + \cos(5x)$$

et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos(x)^2.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Supposons que f est impaire, $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) dx$$

sont zéro pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3 Soit f une fonction T-périodique à dérivée continue. Calculer les coefficients de Fourier de f' à partir de ceux de f.

Exercice 4 Soit f la fonction 2π-périodique avec

$$f(x) = x \sin(x) \qquad \text{sur } [-\pi, \pi[.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. (Suggestion : regarder d'abord s'il y a de symétrie.) En utilisant le théorème de Dirichlet pour $x = \frac{\pi}{2}$, en déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Ici, on prend la sommation sur tous les entiers, donc on lit

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} = \ldots - \frac{1}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} - \frac{1}{4 \cdot 0^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} - \frac{1}{4 \cdot 2^2 - 1} + \ldots$$

Exercice 5 Soit f la fonction π-périodique

$$f(x) = |\sin(x)|.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. (Suggestion : regarder d'abord s'il y a de symétrie.) En utilisant le théorème de Dirichlet pour $x = \frac{\pi}{4}$, en déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{16m^2 - 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 6 Soit f la fonction 2π-périodique avec

$$f(x) = e^x \qquad \text{sur } [-\pi, \pi[.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire, à partir du théorème de Parseval, que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \coth(\pi),$$

où $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$. Est-ce que vous y arrivez aussi à l'aide du théorème de Dirichlet ?

Exercice 7 Soit $0 < r < 1/2$. Considérons la fonction 1-périodique et paire f_r qui est déterminée par la formule

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{r-x}{r^2} & \text{pour} \quad x \in [0, r[\\ 0 & \text{pour} \quad x \in [r, 1/2[. \end{cases}$$

1. Dessiner f_r sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ pour valeurs décroissantes de r.
2. Déterminer les coefficients de Fourier pour f_r (en fonction de r).
3. Déterminer la limite des coefficients de Fourier quand $r \to 0$.