TD n°5
Composition d'intégrales et séries

Exercice 1 Calculer les intégrales doubles ci-dessous.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x^2+xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **b)** $\displaystyle\int_0^1\int_1^\infty \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

c) $\displaystyle\int_1^\infty\int_0^1 \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 x^y\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

Exercice 2

1. Pour n un entier positif, calculer $\int_0^1 \ln(x)x^n\mathrm{d}x$.
2. En utilisant le théorème de Fubini pour séries et intégrales, montrer que

$$\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Suggestion : développer d'abord $\frac{1}{1-x^2}$ en série entière.

Exercice 3

1. Considérons la fonction

$$f:\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}^+ : (x,y)\to\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$$

où $\mathbb{R}_0^+=(0,+\infty)$. Montrer que

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}$$

2. Montrer que

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{\ln(x^2)}{1-x^2}\mathrm{d}x=-4\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Suggestion : écrire d'abord $\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}=\frac{A(x)}{1+y}+\frac{B(x)}{1+x^2y}$ pour certaines fonctions $A(x)$, $B(x)$, où on peut supposer que $x\neq 1$.

3. Déduire du théorème de Fubini pour les intégrales doubles de fonctions positives et de l'exercice précédent que

$$\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$