TD n°6 Intégrales doubles

Exercice 1 En interprétant le domaine donné Ω comme borné par deux graphes de fonctions, calculer les intégrales $\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ suivantes.

a) $\Omega = \{(x,y) \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$, $\qquad f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$,

b) $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$,

c) $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq y, 0 \leq x, x+y \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = xy$,

d) $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2+y^2 \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = x$,

e) $\Omega = \{(x,y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \cos(y)\}$, $\qquad f(x,y) = x$,

f) $\Omega = \{(x,y) \mid y^4 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}$, $\qquad f(x,y) = x$,

g) $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\qquad f(x,y) = \frac{\cos^2(y)}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 2 En utilisant une transformation appropriée, calculer l'intégrale double $\iint_\Omega f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ pour les domaines Ω et les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suivants :

a) $\Omega = \{(x,y) \mid x \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$,

b) $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$,

c) $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = \frac{y}{x}$,

d) $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$, $\qquad f(x,y) = e^{\frac{x-y}{x+y}}$,

e) $\Omega = \{(x,y) \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$, $\qquad f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ (Suggestion : $(x,y) = (u^2v, uv^2)$),

f) $\Omega = \{(x,y) \mid x, y \geq 0, y \geq x^3, x \geq y^3\}$, $\qquad f(x,y) = x^3 - \frac{1}{3}y^3$.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ est-ce que $\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est convergente, où D_1 est le disque de rayon 1 autour de l'origine ?