TD n°7
Intégrales curvilignes

Exercice 1 Calculer les intégrales curvilignes $\int_\gamma F(p) \cdot \mathrm{d}p$ pour les courbes paramétrées γ et fonctions F suivantes, en utilisant la définition.

(a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \to (t,0)$, $F(x,y) = (x^2, 0)$,

(b) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \to (t,0)$, $F(x,y) = (0, x^2)$,

(c) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \to (t,0)$, $F(x,y) = (y^2, 0)$,

(d) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \to (\cos(t), \sin(t))$, $F(x,y) = (-y, x)$,

(e) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \to (\cos(-t), \sin(-t))$, $F(x,y) = (-y, x)$,

(f) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \to (t,t^3)$, $F(x,y) = (x^2, y^2)$,

(g) γ la courbe qui tourne une fois contre le sens des aiguilles d'une montre autour du rectangle formé par les points $(0,0), (2,0), (0,1), (2,1)$, et $F(x,y) = (x, 0)$.

(h) γ la courbe qui tourne une fois contre le sens des aiguilles d'une montre autour du triangle formé par les points $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$, et $F(x,y) = (y, x)$,

(i) γ la courbe qui tourne une fois dans le sens des aiguilles d'une montre autour le bord de l'ensemble $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$, et $F(x,y) = (x^2 y, \frac{1}{2} x y^2)$.

Exercice 2 Soient $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs avec

$$F(x,y) = (P(x), Q(y)).$$

Montrer que F est exact, et en déduire que

$$\int_\gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

pour tout lacet γ.

Exercice 3 Si possible, calculer les intégrales curvilignes $\int_\gamma F(p) \cdot \mathrm{d}p$ pour les courbes paramétrées γ et fonctions F suivantes, en utilisant le théorème de Green-Riemann. *Attention* : on vérifie d'abord si les conditions de ce théorème sont satisfaites. Autrement, on utilise la définition pour évaluer l'intégrale curviligne.

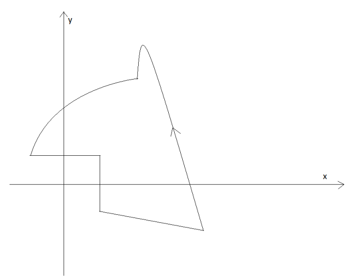
(a) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \to (\cos(t), \sin(t))$, $F(x,y) = (xy^2 + y + 1, xy)$.

(b) γ la courbe qui tourne une fois contre le sens des aiguilles d'une montre autour du triangle formé par les points $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$, et $F(x,y) = (y, x)$,

(c) γ la courbe qui tourne une fois dans le sens des aiguilles d'une montre autour le bord de l'ensemble $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$, et $F(x,y) = (x^2 y, \frac{1}{2} x y^2)$.

(d) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \to (\cos(t), \sin(t))$, $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

(e) γ la figure comme ci-dessous, F la fonction $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.



Exercice 4 Calculer $\int_{\gamma_1} F(p) \cdot \mathrm{d}p + \int_{\gamma_2} F(p) \cdot \mathrm{d}p$ où

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \to (\cos(t), \sin(t))$$

et

$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \to (\frac{1}{2}\cos(-t), \frac{1}{2}\sin(-t)),$$

et où

$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$